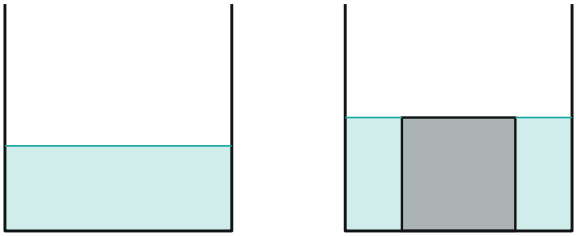
Стальной куб в сосуде с водой

Задача 2. [Курчатов 2012/13, 7 класс, задача 2] В вертикальный прямоугольный сосуд с квадратным дном налита вода. В сосуд аккуратно поставили стальной куб, длина ребра которого в два раза меньше длины стороны квадратного дна. После этого уровень воды в сосуде совпал с верхней гранью куба. Во сколько раз в результате изменилась потенциальная энергия воды в сосуде?



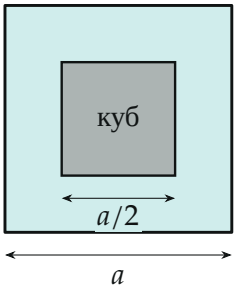
Поясняющий рисунок: сосуд до и после того, как в него поставили куб (вид сбоку).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на потенциальную энергию тела, размазанного по объёму. Потенциальная энергия воды $E = Mgh_{\text{ц}}$, где $h_{\text{ц}}$ — высота её центра масс над дном. Масса воды не меняется, поэтому отношение энергий равно отношению высот центра масс. Куб тяжёлый (сталь тонет), стоит на дне и выталкивает воду вверх: центр масс воды поднимается, энергия растёт.

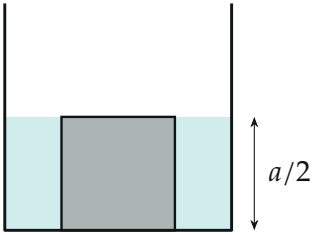
Обозначения. a — сторона дна сосуда, $\dfrac{a}{2}$ — ребро куба; h_0 — начальная глубина воды; M — масса воды; E_0, E_1 — её потенциальная энергия до и после (отсчёт от дна).

1. Объём воды. После того как поставили куб, вода заполняет слой высотой $\dfrac{a}{2}$ (до верхней грани куба), кроме самого куба (рисунок 2):

$$V = a^2 \cdot \frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{8} = \frac{3}{8}a^3.$$



вид сверху



вид сбоку

Конечное состояние: вода занимает слой высотой $a/2$ вокруг куба; площадь сечения воды $a^2 - a^2/4$.

2. Начальная глубина. До того как поставили куб, тот же объём воды занимал всё сечение a^2:

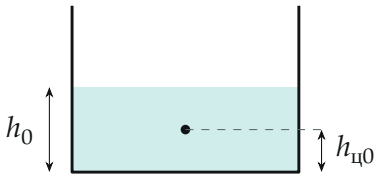
$$a^2 h_0 = \frac{3}{8}a^3 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{3}{8}a.$$

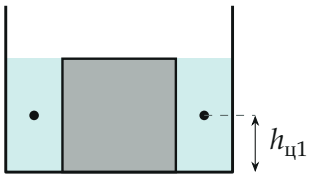
3. Энергия до. Вода — однородный прямоугольный слой высотой h_0, его центр масс посередине (рисунок 3):

$$h_{ц0} = \frac{h_0}{2} = \frac{3}{16}a, \qquad E_0 = Mg \cdot \frac{3}{16}a.$$

4. Энергия после. Вода занимает слой от дна до высоты $\frac{a}{2}$, и в каждом горизонтальном сечении её площадь одна и та же: $a^2 - \frac{a^2}{4}$. Масса распределена по высоте равномерно, центр масс — на середине слоя:

$$h_{ц1} = \frac{a}{4}, \qquad E_1 = Mg \cdot \frac{a}{4}.$$





Центр масс воды (точки) до и после: слой стал выше — центр масс поднялся.

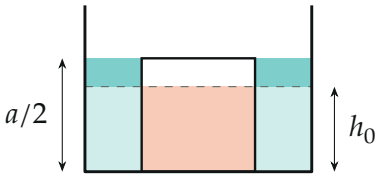
5. Отношение энергий.

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{h_{ц1}}{h_{ц0}} = \frac{a/4}{3a/16} = \frac{4}{3}.$$

6. Второй способ — по слоям. Поставить куб — то же, что убрать воду из части куба ниже прежнего уровня ($0 \dots h_0$, площадь $\frac{1}{4}a^2$) и долить её в кольцо над прежним уровнем ($h_0 \dots \frac{a}{2}$, площадь $\frac{3}{4}a^2$, рисунок 4). Энергия однородного слоя площадью A от высоты y_1 до y_2 равна $\rho g A \dfrac{y_2^2 - y_1^2}{2}$ (масса на высоту середины). Складываем: начальный слой, плюс кольцо, минус часть куба:

$$\frac{E_1}{\rho g a^2} = \frac{h_0^2}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(a/2)^2 - h_0^2}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{h_0^2}{2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{9}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{64} - \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{64}\right) = \frac{3}{32}a^2,$$

а $\dfrac{E_0}{\rho g a^2} = \dfrac{h_0^2}{2} = \dfrac{9}{128}a^2$; отношение $\dfrac{3/32}{9/128} = \dfrac{4}{3}$ — то же.



Вода из объёма куба (морковный) переехала в кольцо над прежним уровнем (тёмно-бирюзовое).

Обратите внимание. Куб не плавает — он стальной и стоит на дне, поэтому вода заполняет пространство вокруг него до самого дна. Отношение не зависит от размеров сосуда и плотности воды: важно только соотношение ребра и стороны дна.

Ответ: потенциальная энергия воды увеличилась в $\dfrac{E_1}{E_0} = \dfrac{h_{ц1}}{h_{ц0}} = \dfrac{4}{3}$ раза.

Проверка. Отношение безразмерно. Знак: центр масс поднялся ($\frac{a}{4} > \frac{3}{16}a$), значит, энергия должна вырасти — так и есть. Два способа (по центрам масс и по слоям) дают одно и то же.

Ответ. Увеличилась в $4/3$ раза.