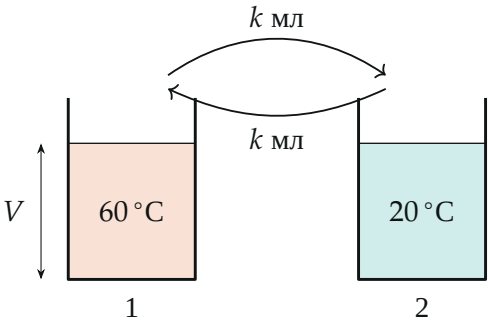
Переливания воды туда-обратно

Задача 3. [Курчатов 2012/13, 7 класс, задача 3] В двух сосудах находится по 2020 мл воды, в первом — при температуре $t_1 = +60$ °C, а во втором — при температуре $t_2 = +20$ °C. Из первого сосуда переливают 1 мл воды во второй сосуд, и потом 1 мл воды переливают обратно из второго сосуда в первый. Затем из первого сосуда переливают 2 мл воды во второй сосуд, и потом 2 мл воды переливают обратно из второго сосуда в первый. Так продолжают делать много раз, при каждой следующей паре переливаний туда-обратно увеличивая порцию переливаемой воды на 1 мл. В последний раз из первого сосуда переливают 2013 мл воды во второй сосуд, и потом 2013 мл воды переливают обратно из второго сосуда в первый. Какая температура установится в обоих сосудах после завершения всех переливаний? Считайте, что после каждого переливания в сосуде быстро устанавливается тепловое равновесие. Потерями теплоты и удельными теплоёмкостями сосудов можно пренебречь.



Поясняющий рисунок: в каждом сосуде $V = 2020$ мл; в паре номер k переливают k мл туда и k мл обратно.

▲ **Решение. Что происходит.** После каждой пары переливаний в обоих сосудах снова по $V = 2020$ мл воды. Тепло никуда не уходит, поэтому средняя температура двух равных объёмов не меняется — она всё время 40 °C. Меняется только *разность* температур: каждая пара её уменьшает в некоторое число раз. Найдём это число — и увидим, что за 2013 пар

разность становится ничтожной. Это задача на уравнение теплового баланса, применённое много раз подряд.

Обозначения. $V = 2020$ мл; перед парой номер k температуры T_1 и T_2 (первый сосуд горячее); θ — температура второго сосуда после первого переливания пары; T_1', T_2' — температуры после пары; $\Delta = T_1 - T_2$ — разность температур. Плотность и удельная теплоёмкость воды одинаковы во всех порциях, поэтому в уравнениях баланса вместо масс можно писать объёмы.

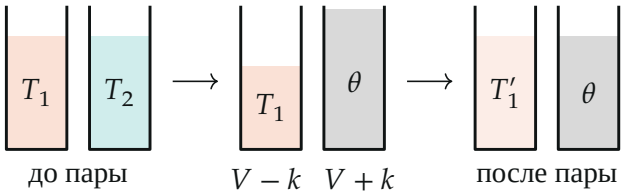
1. Первое переливание пары: k мл из первого сосуда во второй. Уравнение теплового баланса для второго сосуда (горячая порция остыла от T_1 до θ, вода второго сосуда нагрелась от T_2 до θ):

$$k\,(T_1 - \theta) = V\,(\theta - T_2) \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{VT_2 + kT_1}{V + k}, \qquad T_1 - \theta = \frac{V}{V + k}\,\Delta.$$

2. Второе переливание: k мл при θ обратно в первый сосуд. Во втором сосуде остаётся V мл при θ, так что $T_2' = \theta$. В первом $V - k$ мл при T_1 смешиваются с k мл при θ:

$$(V - k)(T_1 - T_1') = k\,(T_1' - \theta) \quad \Longrightarrow \quad T_1' - \theta = \frac{V - k}{V}\,(T_1 - \theta).$$

Рисунок 2 показывает объёмы и температуры по ходу одной пары.



Одна пара переливаний: k мл туда (второй сосуд принимает $V + k$ мл и приходит к θ), затем k мл обратно; в конце снова по V мл.

3. Во сколько раз уменьшилась разность. Разность после пары $\Delta' = T_1' - T_2' = T_1' - \theta$. Перемножим результаты шагов 1 и 2:

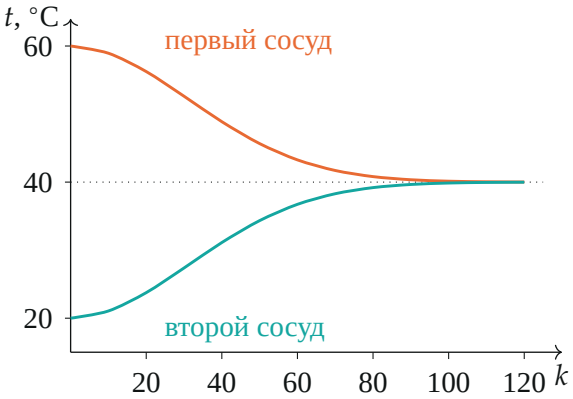
$$\Delta' = \frac{V - k}{V} \cdot \frac{V}{V + k}\,\Delta = \frac{V - k}{V + k}\,\Delta.$$

Множитель меньше единицы: каждая пара сближает температуры.

4. Средняя температура не меняется. Закон сохранения энергии для обоих сосудов вместе: тепло не теряется, в каждом сосуде после пары снова V мл, значит,

$$VT_1' + VT_2' = VT_1 + VT_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_1' + T_2'}{2} = \frac{60 + 20}{2}\,^\circ\text{C} = 40\,^\circ\text{C}.$$

То есть $T_1 = 40 + \Delta/2$, $T_2 = 40 - \Delta/2$: сосуды симметрично сходятся к $40\,^\circ$C (рисунок 3).

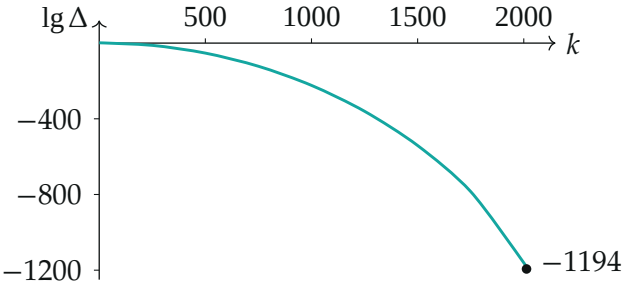


Температуры сосудов после k пар (по вычисленным точкам): уже к сотой паре они отличаются от $40\,^\circ C$ меньше чем на $0{,}2\,^\circ C$.

5. Разность после всех 2013 пар.

$$\Delta_{\text{кон}} = 40\,^\circ\text{C} \cdot \frac{2019}{2021} \cdot \frac{2018}{2022} \cdots \frac{2020 - 2013}{2020 + 2013}.$$

Оценим без вычислений. Одна только последняя пара умножает разность на $\dfrac{7}{4033} < \dfrac{1}{500}$, а предыдущие — на $\dfrac{8}{4032}$, $\dfrac{9}{4031}$, …, $\dfrac{16}{4024}$ — каждая меньше чем на $\dfrac{1}{250}$. Уже десять последних пар уменьшают разность больше чем в $250^{10} \approx 10^{24}$ раз. Точный подсчёт (python) даёт $\Delta_{\text{кон}} \approx 40 \cdot 10^{-1195}\,^\circ$C (рисунок 4). Никакой термометр такую разность не заметит: температуры в сосудах равны.



Десятичный логарифм разности температур (в °C) после k пар; к концу разность порядка 10^{-1194} °C.

Обратите внимание. Последняя пара не делает температуры точно равными: после неё в первом сосуде 7 мл прежней воды. Равенство — результат накопления множителей $\frac{V-k}{V+k}$ всех пар, а ответ 40 °C даёт сохранение средней температуры.

Ответ: в обоих сосудах установится

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} = 40\ ^\circ\text{C}.$$

Проверка. Шаг 3 при $k = V$ (перелили всё туда и всё обратно) даёт $\Delta' = 0$ — верно: вся вода смешалась во втором сосуде. Численное моделирование всех 4026 переливаний на python с точными дробями даёт 40,000… °C в обоих сосудах.

Ответ. 40 °C в обоих сосудах (средняя температура сохраняется, разность после всех пар порядка 10^{-1194} °C).