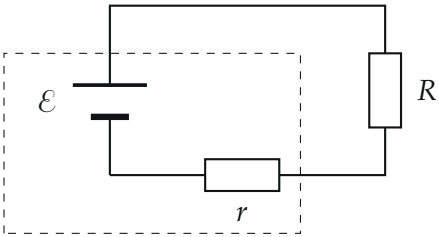
Мощность на резисторе от батарейки

Задача 5. [Курчатов 2012/13, 8 класс, задача 5] При подключении к батарейке резистора с сопротивлением R_1 выделяющаяся в этом резисторе полезная мощность оказалась в 2 раза меньше максимально возможной. При замене резистора R_1 на другой резистор с сопротивлением R_2 выделяющаяся в нём мощность оказалась в 3 раза меньше максимально возможной. Найдите, чему может быть равно отношение номиналов резисторов R_1/R_2?



Поясняющий рисунок: батарейка — ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r; к ней подключён резистор R.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Реальная батарейка — это ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r. Мощность на внешнем резисторе мала и при очень малом R (ток большой, но напряжение на R почти ноль), и при очень большом R (ток почти ноль). Максимум — посередине, при $R = r$. Каждая доля мощности, меньшая максимальной, достигается при *двух* сопротивлениях — одном меньше r, другом больше. Поэтому отношений R_1/R_2 получится четыре. Это задача на согласование нагрузки: мощность во внешней цепи через закон Ома для полной цепи.

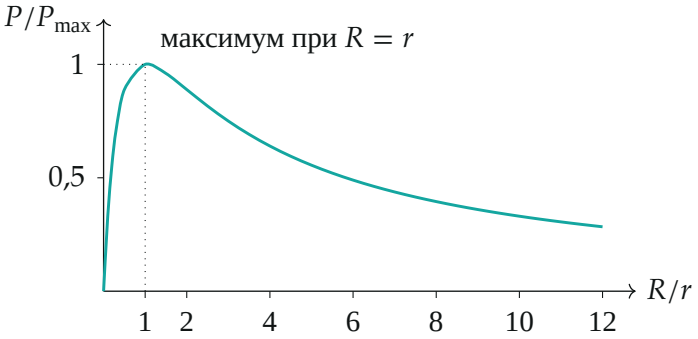
Обозначения. $\mathcal{E}$, r — ЭДС и внутреннее сопротивление батарейки; $x = R/r$ — сопротивление нагрузки в единицах r; $P_{\max}$ — максимальная мощность на нагрузке.

1. Мощность на нагрузке. Закон Ома для полной цепи: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$.

Мощность на резисторе

$$P = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}.$$

В обычном масштабе (рисунок 2) видно: мощность быстро растёт от нуля, достигает максимума при $R = r$ и медленно спадает.



Мощность на нагрузке в зависимости от R/r (по вычисленным точкам).

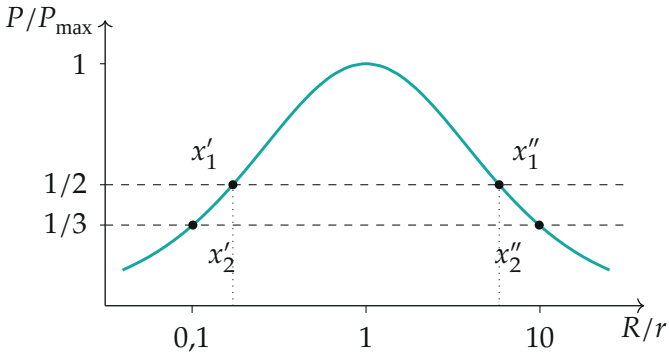
2. Максимальная мощность. Запишем P через x:

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{r} \cdot \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} \cdot \frac{4x}{(1+x)^2}.$$

Множитель $\dfrac{4x}{(1+x)^2} \leqslant 1$, потому что $(1+x)^2 - 4x = (1-x)^2 \geqslant 0$; равенство — при $x = 1$. Значит, $P_{\max} = \dfrac{\mathcal{E}^2}{4r}$ при $R = r$, и

$$\frac{P}{P_{\max}} = \frac{4x}{(1+x)^2}.$$

График этой функции в логарифмическом масштабе — на рисунке 3. По горизонтали отложен $\lg x$: тогда видно, что график симметричен — значения при x и при $1/x$ одинаковы (подстановка $x \to 1/x$ не меняет дробь).



Доля максимальной мощности в зависимости от R/r (логарифмическая шкала, по вычисленным точкам): уровни $1/2$ и $1/3$ достигаются при двух сопротивлениях каждый.

3. Первый резистор. $\dfrac{4x_1}{(1+x_1)^2} = \dfrac{1}{2}$, то есть $x_1^2 + 2x_1 + 1 = 8x_1$:

$$x_1^2 - 6x_1 + 1 = 0, \qquad x_1 = 3 \pm 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} \pm 1)^2,$$

то есть $x_1' \approx 0{,}172$, $x_1'' \approx 5{,}83$. Корни взаимно обратны (их произведение по теореме Виета равно 1) — это та самая симметрия $x \leftrightarrow 1/x$.

4. Второй резистор. $\dfrac{4x_2}{(1+x_2)^2} = \dfrac{1}{3}$, то есть $x_2^2 + 2x_2 + 1 = 12x_2$:

$$x_2^2 - 10x_2 + 1 = 0, \qquad x_2 = 5 \pm 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} \pm \sqrt{2})^2,$$

то есть $x_2' \approx 0{,}101$, $x_2'' \approx 9{,}90$.

5. Все отношения. $R_1/R_2 = x_1/x_2$; любой корень первого уравнения с любым корнем второго — четыре варианта (рисунок 4). Через квадраты:

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{\sqrt{2} \pm 1}{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}}\right)^2.$$

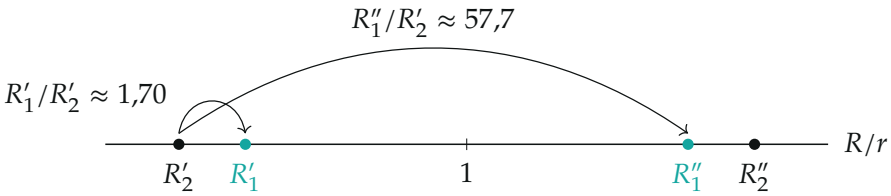
Умножим на сопряжённое, $\dfrac{1}{\sqrt{3}\pm\sqrt{2}} = \sqrt{3}\mp\sqrt{2}$:

$$\frac{R_1}{R_2} = (\sqrt{2}+1)^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = \left(\sqrt{6}+2+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 \approx 57{,}7$$

($R_1 > r$, $R_2 < r$),

$$\frac{R_1}{R_2} = (\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = \left(\sqrt{6}+2-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 \approx 1{,}70$$

($R_1 < r$, $R_2 < r$), и два обратных им: $\approx 0{,}589$ (оба больше r) и $\approx 0{,}0173$ ($R_1 < r$, $R_2 > r$).



Корни на оси R/r (логарифмическая шкала): R_1 — бирюзовые, R_2 — чёрные; показаны два из четырёх отношений, остальные два — обратные.

Обратите внимание. Отношение R_1/R_2 не одно: в условии не сказано, больше или меньше r каждое сопротивление. Ответ 57,7 и 0,0173 соответствует резисторам по разные стороны от r, 1,70 и 0,589 — по одну сторону.

6. Проверка подстановкой. При $x_1 = 5{,}83$: $4\cdot 5{,}83/6{,}83^2 = 23{,}3/46{,}6 = 0{,}500$; при $x_2 = 9{,}90$: $39{,}6/118{,}8 = 0{,}333$ — верно (python: до 10^{-12}).

Ответ:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{3\pm 2\sqrt{2}}{5\pm 2\sqrt{6}}: \qquad \approx 57{,}7;\ \ 1{,}70;\ \ 0{,}589;\ \ 0{,}0173.$$

Проверка. Размерность: отношение сопротивлений безразмерно, ЭДС и r сократились — ответ не зависит от батарейки, как и должно

быть, раз в условии о ней ничего не известно. Варианты попарно обратны: замена $x \to 1/x$ не меняет долю мощности.

Ответ. $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{5 \pm 2\sqrt{6}}$ при любых сочетаниях знаков: $\approx$ 57,7; 1,70; 0,589; 0,0173.