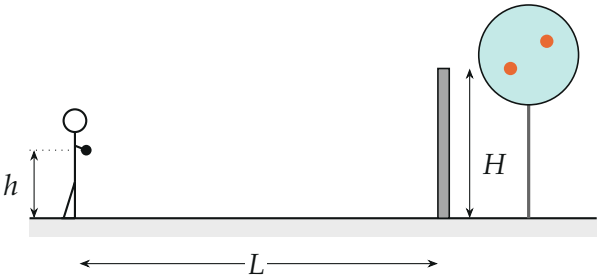
Камушки через забор

Задача 6. [Курчатов 2012/13, 9 класс, задача 6] Хулиган бросает через забор мелкие камушки, пытаясь посшибать с веток вишни, которые растут в саду у дяди Вани вблизи забора. Хулиган достаточно хорошо натренирован, и поэтому может сообщать камушку максимальную начальную скорость $V_0 = 10$ м/с, направленную под любым углом к горизонту. В момент броска камень находится на высоте $h = 1{,}5$ м над землёй. При этом хулиган опасается подходить к забору ближе, чем на расстояние $L = 8$ м. Забор какой минимальной высоты H должен построить дядя Ваня, чтобы гарантированно сохранить свои вишни? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2, влиянием воздуха пренебречь.



Поясняющий рисунок: камень вылетает с высоты h на расстоянии не меньше L от забора высоты H; за забором вишня.

▲ **Решение. Что происходит.** Камень летит по параболе. Забор спасает вишни, если ни одна возможная траектория не проходит над его верхом. Значит, нужно найти, на какую наибольшую высоту может подняться камень над точкой, где стоит забор, перебрав все углы броска, все скорости до V_0 и все расстояния не меньше L. Это задача на «параболу безопасности»: для каждой горизонтальной координаты есть наибольшая достижимая высота.

Обозначения. Начало координат — на земле под точкой броска, ось x — горизонтально к забору, ось y — вертикально вверх; α — угол броска к горизонту, $v \leqslant V_0$ — начальная скорость; x — расстояние от хулигана до забора.

1. Что выбирает хулиган. Чем больше скорость, тем выше может пройти камень при той же дальности, поэтому берём $v = V_0$. Чем дальше от забора, тем ниже он проходит над забором (дальше покажем), поэтому худший случай — $x = L$. Остаётся выбрать угол α.

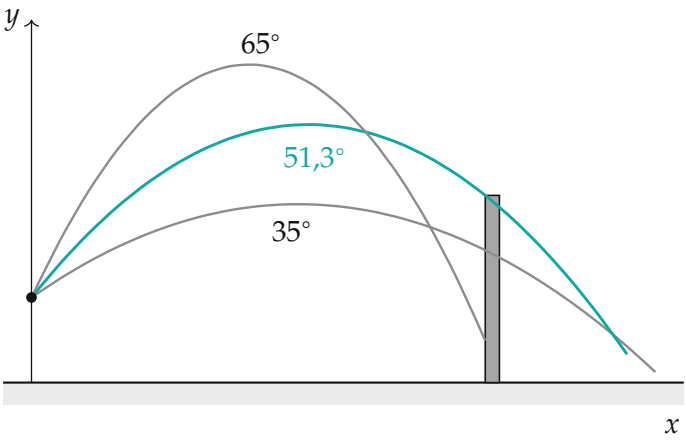
2. Уравнение траектории. Ускорение $\vec{a} = \vec{g}$; в проекциях на оси x: $x = V_0 \cos\alpha \cdot t$, на y: $y = h + V_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$. Исключим время $t = x/(V_0 \cos\alpha)$ и запишем $1/\cos^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$:

$$y = h + x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2}\left(1 + \tan^2\alpha\right).$$

Высота камня над забором (при $x = L$) — квадратный трёхчлен относительно $k = \tan\alpha$:

$$y(L) = h - \frac{gL^2}{2V_0^2} + Lk - \frac{gL^2}{2V_0^2}k^2.$$

На рисунке 2 — три траектории с разными углами; через верх забора проходит лишь одна.



Траектории при $V_0 = 10$ м/с из одной точки под углами 35°, 51,3° и 65° (по вычисленным точкам): выше всех над забором проходит средняя.

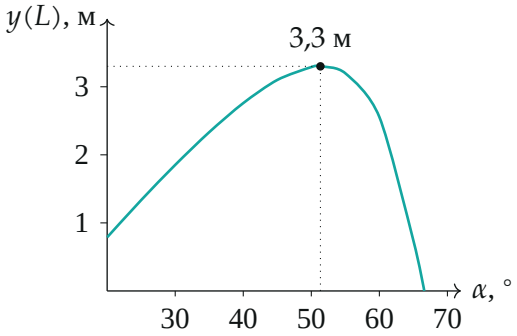
3. Наибольшая высота над забором. Трёхчлен $y(k)$ — парабола ветвями вниз; её вершина при

$$\frac{dy}{dk} = L - \frac{gL^2}{V_0^2}k = 0, \qquad k = \tan\alpha = \frac{V_0^2}{gL} = \frac{100}{10\cdot 8} = 1{,}25, \quad \alpha \approx 51{,}3^\circ.$$

Подставляем:

$$y_{\max}(L) = h - \frac{gL^2}{2V_0^2} + \frac{V_0^2}{g} - \frac{V_0^2}{2g} = h + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gL^2}{2V_0^2}.$$

Рисунок 3 — та же зависимость высоты над забором от угла броска, посчитанная по точкам: максимум при 51°, около 3,3 м.

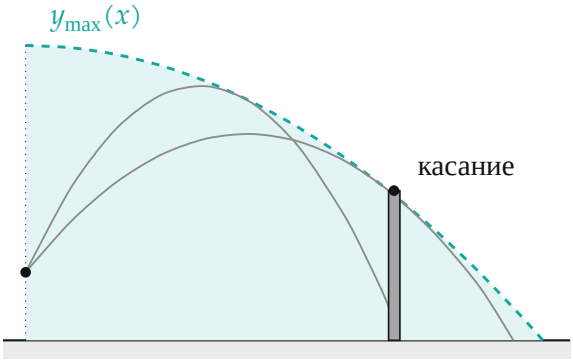


Высота камня над местом забора ($x = L = 8$ м) в зависимости от угла броска при $V_0 = 10$ м/с.

4. Парабола безопасности. Формула шага 3 верна для любого расстояния x:

$$y_{\max}(x) = h + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2}.$$

Она убывает с ростом x — поэтому отходить дальше хулигану невыгодно, худший случай действительно $x = L$. Траектории при всех углах лежат под этой кривой и касаются её (рисунок 4). Камень с меньшей скоростью тем более ниже: при $v < V_0$ вся кривая опускается.



Парабола безопасности (штрих): все точки, куда может попасть камень, лежат под ней. Верх забора должен быть на ней или выше.

5. Высота забора. Вишни растут вблизи забора, поэтому камень, прошедший над забором даже вплотную к верху, может их сбить. Забор должен закрыть всю область достижимых высот над точкой $x = L$:

$$H = h + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gL^2}{2V_0^2} = 1{,}5 + \frac{100}{20} - \frac{10 \cdot 64}{200} = 1{,}5 + 5 - 3{,}2 = 3{,}3 \text{ м}.$$

Обратите внимание. Оптимальный угол — не 45°: точка броска ниже верха забора и забор ближе, чем дальность полёта, поэтому выгоднее бросать круче (51,3°). При 45° камень проходит на 3,1 м — на 0,2 м ниже.

Ответ:

$$H = h + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gL^2}{2V_0^2} = 3{,}3 \text{ м}.$$

Проверка. Размерность: каждое слагаемое — метры. Предел $L \to 0$: $H = h + V_0^2/(2g)$ — высота подъёма камня, брошенного вертикально, верно. Второй способ: из рисунка 3 численный перебор углов даёт максимум 3,300 м при $\alpha = 51{,}3°$.

Ответ. $H = h + \dfrac{V_0^2}{2g} - \dfrac{gL^2}{2V_0^2} = 3{,}3$ м.