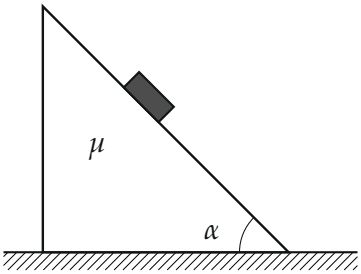
Шайба на движущемся клине

Задача 7. [Курчатов 2012/13, 9 класс, задача 7] На горизонтальной плоскости стоит клин с углом при основании $\alpha = 45°$. На наклонную поверхность клина положили шайбу, коэффициент трения которой о клин равен $\mu = 0{,}5$. С каким ускорением $\vec{a}$ надо двигать клин по плоскости, чтобы шайба по нему не скользила? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

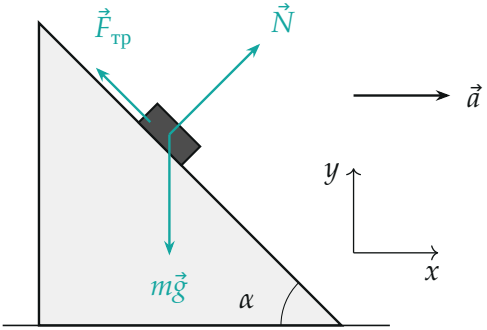


▲ **Решение.** **Что происходит.** Шайба не скользит по клину — значит, движется вместе с ним с тем же горизонтальным ускорением $\vec{a}$. Это ускорение ей сообщают нормальная реакция и сила трения покоя. Без ускорения шайба соскользнула бы: $\tan 45° = 1 > \mu = 0{,}5$. Если клин разгонять в сторону шайбы (вправо на рисунке), он сильнее прижимает её, и трение покоя может её удержать. Но при слишком большом ускорении клин «выдавливает» шайбу вверх по склону, и трения снова не хватает. Ответ — диапазон ускорений. Это задача на равновесие (здесь — совместное движение) с трением покоя: найти, какое трение нужно, и потребовать $|F_{\text{тр}}| \leqslant \mu N$.

Обозначения. m — масса шайбы; ось x — горизонтально вправо (в сторону, куда смотрит наклонная грань), ось y — вертикально вверх; F — проекция силы трения на направление вверх по склону (знак заранее неизвестен); a — проекция ускорения клина на ось x.

1. Силы, действующие на шайбу (рисунок 2): $m\vec{g}$ вниз; $\vec{N}$ — перпендикулярно склону, в нём составляющие $N\sin\alpha$ по x и $N\cos\alpha$ по y; трение $\vec{F}_{\text{тр}}$ вдоль склона, вверх по склону: составляющие $-F\cos\alpha$ по x

и $F\sin\alpha$ по y. Оси выбраны горизонтально и вертикально, потому что ускорение шайбы горизонтально: по y сразу получится ноль.



Силы, действующие на шайбу; ускорение клина и шайбы $\vec{a}$ направлено вправо. Трение нарисовано вверх по склону, его знак выясним.

2. Второй закон Ньютона для шайбы. $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$; в проекциях:

$$x:\ N\sin\alpha - F\cos\alpha = ma, \qquad y:\ N\cos\alpha + F\sin\alpha - mg = 0.$$

Умножим первое на $\sin\alpha$, второе на $\cos\alpha$ и сложим — уйдёт F; умножим первое на $\cos\alpha$, второе на $\sin\alpha$ и вычтем — уйдёт N:

$$N = m(g\cos\alpha + a\sin\alpha), \qquad F = m(g\sin\alpha - a\cos\alpha).$$

Пока $a < g\tan\alpha = 10$ м/с^2, $F > 0$ — трение направлено вверх по склону (удерживает шайбу от сползания); при $a > 10$ м/с^2 — вниз (удерживает от выдавливания вверх).

3. Условие отсутствия скольжения: $|F| \leqslant \mu N$. Нижняя граница (шайба готова сползти, трение вверх, рисунок 3 слева):

$$g\sin\alpha - a\cos\alpha \leqslant \mu(g\cos\alpha + a\sin\alpha),$$

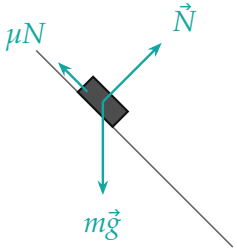
$$a \geqslant g\,\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = g\,\frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{g}{3}.$$

Верхняя граница (шайбу выдавливает вверх, трение вниз, рисунок 3 справа):

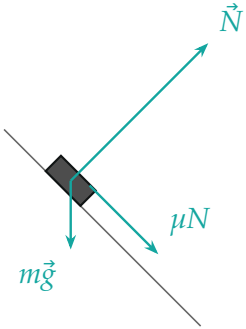
$$a\cos\alpha - g\sin\alpha \leqslant \mu(g\cos\alpha + a\sin\alpha),$$

$$a \leqslant g\,\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = g\,\frac{1+\mu}{1-\mu} = 3g.$$

Здесь $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ сократились; делить на $\cos\alpha - \mu\sin\alpha$ можно, он положителен ($\mu < 1$).



$a_{\min} = g/3$



$a_{\max} = 3g$

Два предельных случая: при $a_{\min}$ трение μN направлено вверх по склону, при $a_{\max}$ — вниз; при $a_{\max}$ реакция много больше силы тяжести.

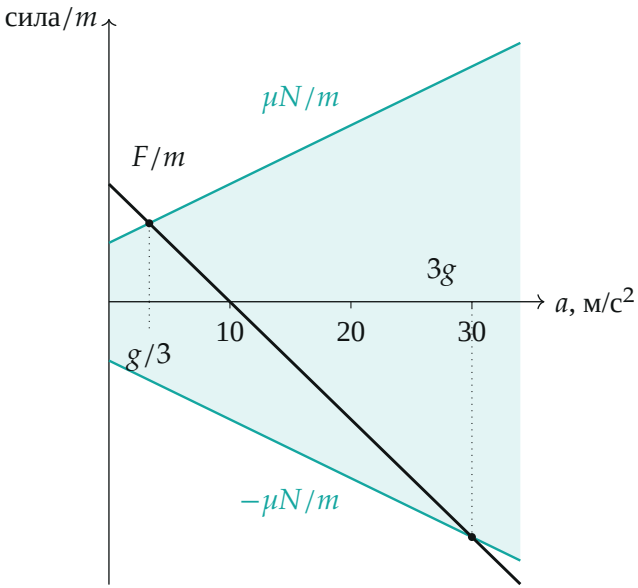
4. Второй способ — в системе отсчёта клина. В ней шайба покоится, и к силам добавляется сила инерции $-m\vec{a}$ (влево). Сумма $m\vec{g} - m\vec{a}$ — «эффективная тяжесть» $m\vec{g}_{\text{эф}}$, отклонённая от вертикали на угол β, $\tan\beta = a/g$. Шайба покоится на склоне, если угол между $\vec{g}_{\text{эф}}$ и нормалью к склону не больше угла трения φ, $\tan\varphi = \mu$: $|\alpha - \beta| \leqslant \varphi$. При $\alpha = 45^\circ$, $\varphi = \arctan 0{,}5 \approx 26{,}6^\circ$:

$$18{,}4^\circ \leqslant \beta \leqslant 71{,}6^\circ,$$

$$a = g\tan\beta \in [\,g\tan 18{,}4^\circ;\ g\tan 71{,}6^\circ\,] = [\,g/3;\ 3g\,],$$

то же самое: $\tan(45^\circ \mp \varphi) = \dfrac{1 \mp 0{,}5}{1 \pm 0{,}5}$.

5. Наглядно (рисунок 4): нужная сила трения $F/m = g\sin\alpha - a\cos\alpha$ (на единицу массы) и допустимая $\pm\mu N/m$ как функции a, по вычисленным точкам. Шайба не скользит, пока прямая F/m лежит в коридоре.



Нужное трение (чёрная прямая) и допустимое (коридор $\pm\mu N/m$): шайба покоится относительно клина при $g/3 \leqslant a \leqslant 3g$.

Обратите внимание. Ускорение должно быть направлено в сторону наклонной грани (клин «подпирает» шайбу). При ускорении в другую сторону N уменьшается, а нужное трение растёт, и шайба соскальзывает при любом a: она скользит уже при $a = 0$, так как $\mu < \tan\alpha$.

Ответ:

$$g\,\frac{1-\mu}{1+\mu} \leqslant a \leqslant g\,\frac{1+\mu}{1-\mu}: \qquad 3{,}3\ \text{м/с}^2 \leqslant a \leqslant 30\ \text{м/с}^2,$$

ускорение горизонтально, в сторону, куда обращена наклонная грань.

Проверка. Размерность — ускорение. При $\mu \to 0$ обе границы сходятся к $g\tan\alpha = g$: без трения шайба покоится только при одном ускорении, когда $\vec{g}_{\text{эф}}$ перпендикулярна склону. При $\mu = \tan\alpha = 1$ нижняя граница 0 — шайба держится и на неподвижном клине, верно.

Ответ. Горизонтально, в сторону наклонной грани (клин подпирает шайбу), с ускорением $g\dfrac{1-\mu}{1+\mu} \leqslant a \leqslant g\dfrac{1+\mu}{1-\mu}$, то есть от 3,3 до 30 м/с^2.