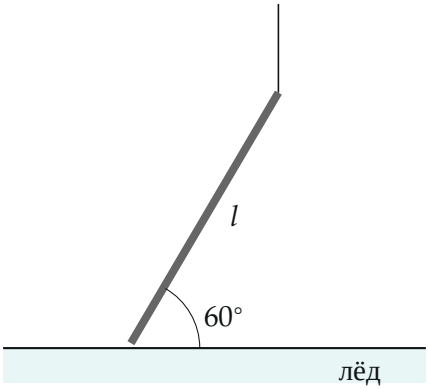
Доска падает на гладком льду

Задача 1. [Курчатов 2013/14, 10 класс, задача 1] На гладком льду лежит однородная доска длиной $l = 2$ м. К одному из концов доски привязали верёвку и стали медленно тянуть её вверх. Когда угол между доской и поверхностью льда стал равен 60°, вертикально натянутая верёвка оборвалась. На какое расстояние сместится при падении доски её нижний конец?

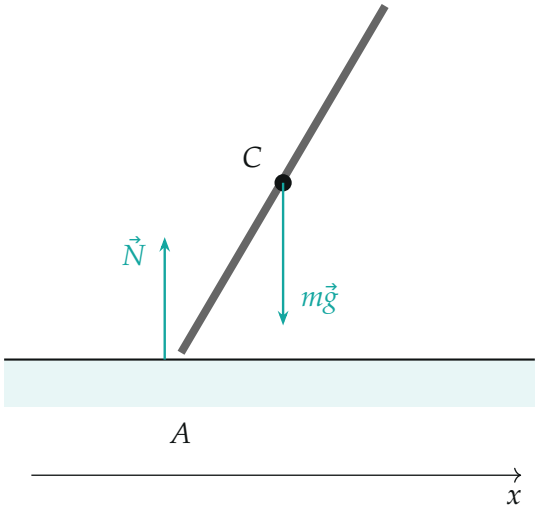


Поясняющий рисунок: доску подняли за конец вертикальной верёвкой до угла 60°.

▲ **Решение. Что происходит.** После обрыва верёвки на доску действуют только вертикальные силы: сила тяжести и нормальная реакция гладкого льда. Горизонтальных сил нет, поэтому центр масс доски движется строго по вертикали — падает вниз, не смещаясь вбок. Это задача на теорему о движении центра масс: зная, где центр масс окажется в конце, находим, где окажется нижний конец.

Обозначения. Ось x — горизонтально вдоль льда, начало — в начальном положении нижнего конца A; C — центр масс доски (её середина); x_C — его координата; $\alpha = 60°$.

1. Силы после обрыва. На доску действуют $m\vec{g}$ (вниз, приложена в C) и $\vec{N}$ — реакция льда в точке A. Лёд гладкий, трения нет, поэтому $\vec{N}$ направлена по нормали к льду, то есть вертикально (рисунок 2).



Силы, действующие на доску сразу после обрыва верёвки: обе вертикальны.

2. Центр масс движется по вертикали. Запишем теорему о движении центра масс доски в проекции на горизонтальную ось x:

$$ma_{Cx} = N_x + mg_x = 0 + 0 = 0.$$

В момент обрыва доска покоилась (её поднимали медленно), то есть $v_{Cx} = 0$. Ускорение по x равно нулю, значит, v_{Cx} так и остаётся нулём, и x_C всё время падения не меняется: центр масс опускается по вертикальной прямой (рисунок 3).

3. Начальное положение. Центр масс — середина доски, на расстоянии $l/2$ от A вдоль доски. Его горизонтальная координата

$$x_C = \frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{l}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{l}{4}.$$

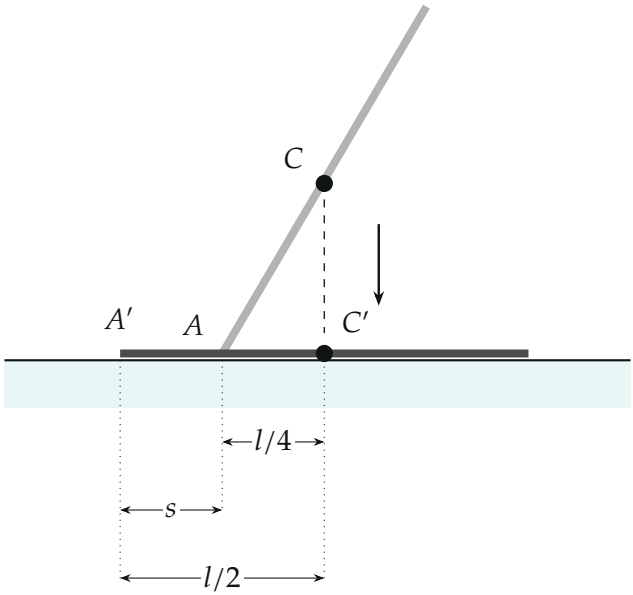
4. Конечное положение. Доска легла на лёд, центр масс — по-прежнему в $x_C = l/4$, а нижний конец — на $l/2$ левее середины:

$$x_{A'} = x_C - \frac{l}{2} = \frac{l}{4} - \frac{l}{2} = -\frac{l}{4}.$$

Минус значит, что конец уехал назад, от точки, над которой была верёв-

ка. Смещение по модулю

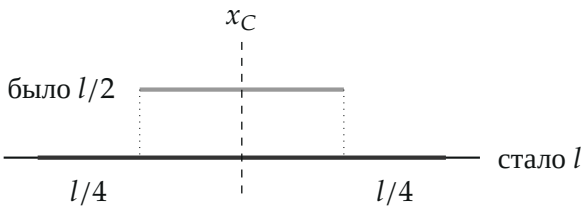
$$s = |x_{A'} - 0| = \frac{l}{4} = \frac{2\text{ м}}{4} = 0{,}5\text{ м}.$$



Начальное (светлое) и конечное (тёмное) положения доски: центр масс опускается по вертикали из C в C', нижний конец уезжает из A в A'.

Обратите внимание. Нижний конец всё время падения остаётся на льду: реакция N не обращается в нуль, пока доска падает (для однородного стержня на гладком полу это известный результат), так что второй «лишней» силы, кроме $m\vec{g}$ и $\vec{N}$, не появляется. Если бы лёд был шероховатым, сила трения была бы горизонтальной, и центр масс сместился бы вбок — ответ стал бы другим.

5. Второй способ — через изменение проекции. Проекция доски на лёд выросла с $l\cos\alpha = l/2$ до l, то есть на $l/2$. Центр масс стоит на месте по горизонтали и всё время делит проекцию пополам, поэтому каждый конец уезжает на половину прироста: $\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2} = \frac{l}{4}$ — то же (рисунок 4).



Проекция доски на лёд: до падения и после; центр x_C неподвижен, каждый конец сдвигается на $l/4$.

Ответ: нижний конец сместится на

$$s = \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha) = \frac{l}{4} = 0{,}5 \text{ м}.$$

Проверка. Размерность — длина. Предел: при $\alpha = 0$ доска уже лежит, $s = 0$; при $\alpha = 90^\circ$ (доска стоит вертикально) $s = l/2$ — центр масс над нижним концом, и конец уходит в сторону на полдоски. Формула $s = \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha)$ даёт оба предела.

Ответ. $s = \frac{l}{2}(1 - \cos 60^\circ) = \frac{l}{4} = 0{,}5$ м (конец уезжает в сторону, противоположную верёвке).