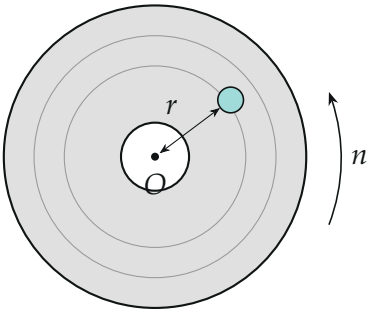
Монетка на виниловом диске

Задача 2. [Курчатов 2013/14, 10 класс, задача 2] На виниловый диск, вращающийся со скоростью $n = 45$ оборотов в минуту, кладут монетку. Если монетку положить на расстоянии $r = 10$ см от центра диска или ближе, она будет покоиться относительно диска. Если же расстояние от монетки до центра будет больше, она начнёт скользить. Найдите коэффициент трения μ между монеткой и поверхностью диска. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.



Поясняющий рисунок: вид сверху на диск, монетка на расстоянии r от оси.

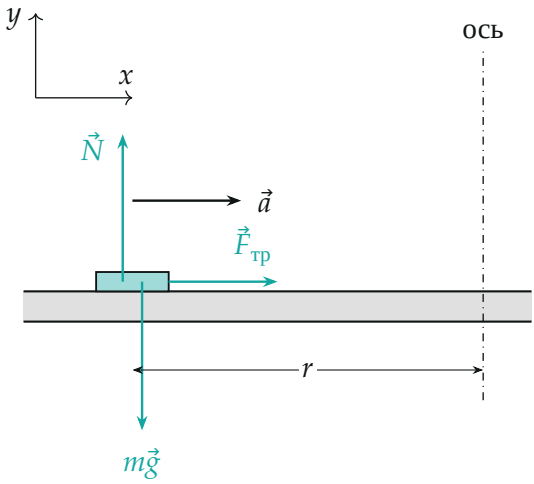
▲ **Решение. Что происходит.** Монетка, лежащая на диске неподвижно относительно него, движется по окружности радиуса r с угловой скоростью диска ω. Ей нужно центростремительное ускорение $\omega^2 r$, и сообщить его может только сила трения покоя — других горизонтальных сил нет. Чем дальше от центра, тем больше нужная сила трения, а трение покоя не может превысить μN. Радиус $r = 10$ см из условия — граница: там нужная сила трения как раз равна максимальной. Это задача на движение по окружности с предельной силой трения покоя.

Обозначения. m — масса монетки; ω — угловая скорость диска; ось x — горизонтально от монетки к центру диска, ось y — вертикально вверх.

1. Угловая скорость. Диск делает $n = 45$ оборотов за 60 с, то есть $\nu = 45/60 = 0{,}75$ оборота в секунду; один оборот — угол 2π:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 0{,}75 \text{ с}^{-1} \approx 4{,}71 \text{ с}^{-1}.$$

2. Силы, действующие на монетку (рисунок 2): сила тяжести $m\vec{g}$ вниз, нормальная реакция $\vec{N}$ вверх, сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ — горизонтально к центру диска. Ускорение монетки $\vec{a}$ направлено к центру, $a = \omega^2 r$.



Вид сбоку: силы, действующие на монетку, и её ускорение (к оси вращения).

3. Второй закон Ньютона для монетки в проекциях на оси:

$$y:\ N - mg = 0 \ \Rightarrow\ N = mg; \qquad x:\ F_{\text{тр}} = m\omega^2 r.$$

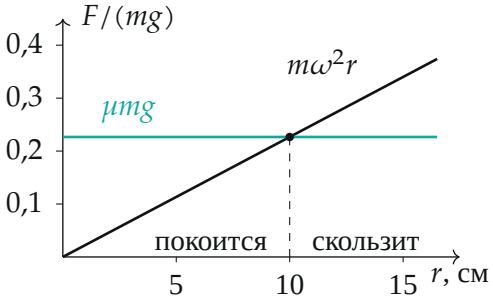
Ось y выбрана вертикальной, потому что вертикального ускорения нет — из неё сразу находится N; ось x — к центру, вдоль ускорения.

4. Условие покоя. Трение покоя не больше максимального: $F_{\text{тр}} \leqslant \mu N = \mu mg$. Значит, монетка не скользит при

$$m\omega^2 r \leqslant \mu mg \quad \Longleftrightarrow \quad r \leqslant \frac{\mu g}{\omega^2}.$$

Нужная сила трения растёт с r линейно, а максимальная от r не зависит (рисунок 3). По условию граница — ровно $r = 10$ см, поэтому

$$\frac{\mu g}{\omega^2} = r \quad \Longrightarrow \quad \mu = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{(2\pi\nu)^2 r}{g}.$$



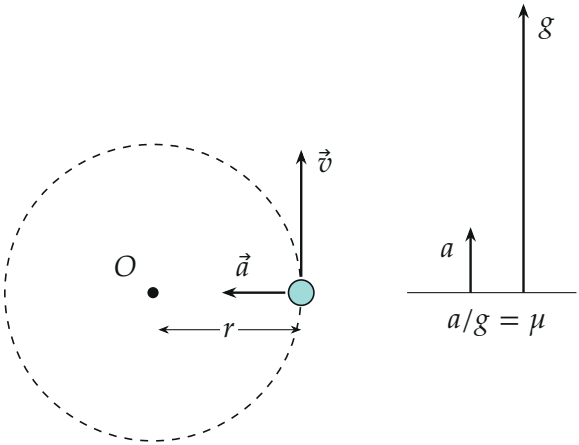
Нужная сила трения $m\omega^2 r$ растёт с расстоянием; при $r > 10$ см она больше предельной μmg (значения по ответу $\mu \approx 0{,}23$).

5. Числа.

$$\mu = \frac{(4{,}71\ \text{с}^{-1})^2 \cdot 0{,}10\ \text{м}}{9{,}8\ \text{м/с}^2} = \frac{22{,}2 \cdot 0{,}10}{9{,}8} \approx 0{,}23.$$

Обратите внимание. Обороты в минуту — не угловая скорость: сначала обороты в секунду, потом множитель 2π. Пропуск 2π даёт ответ в $4\pi^2 \approx 40$ раз меньше.

6. Второй способ — через линейную скорость. Монетка проходит окружность $2\pi r = 0{,}628$ м за период $T = 1/\nu = 1{,}33$ с, её скорость $v = 2\pi r/T \approx 0{,}471$ м/с. Центростремительное ускорение $a = v^2/r = 0{,}222/0{,}10 \approx 2{,}22$ м/с^2, и $\mu = a/g \approx 0{,}23$ — то же (рисунок 4: ускорение a по сравнению с g).



Монетка на границе: скорость по касательной, ускорение к центру; справа — ускорение a в масштабе g.

Ответ:

$$\mu = \frac{4\pi^2\nu^2 r}{g} = \frac{4\pi^2 n^2 r}{g\cdot(60\text{ с})^2} \approx 0{,}23.$$

Проверка. Размерность: $\omega^2 r/g$ — $(\text{с}^{-2}\cdot\text{м})/(\text{м}/\text{с}^2)$, безразмерно, как и положено коэффициенту трения. Зависимость разумна: чем быстрее вращается диск (n больше), тем ближе к центру должна быть граница при том же μ; при $n \to 0$ любое μ удержит монетку где угодно ($r_{\text{гр}} = \mu g/\omega^2 \to \infty$).

Ответ. $\mu = \dfrac{(2\pi n)^2 r}{g} \approx 0{,}23$ (здесь $n = 0{,}75$ об/с).