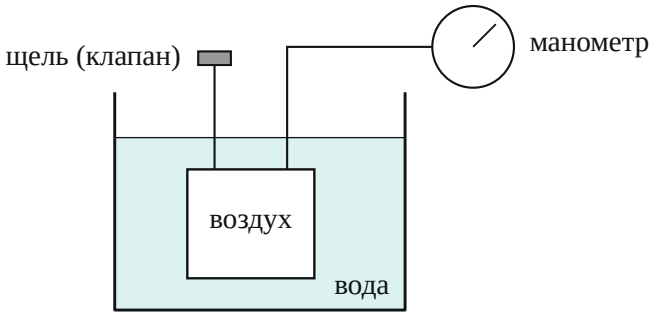
Негерметичный сосуд с манометром

Задача 3. [Курчатов 2013/14, 10 класс, задача 3] Юный экспериментатор изучает зависимость давления идеального газа от температуры. Для этого он изготовил сосуд, заполненный воздухом при атмосферном давлении $P = 10^5$ Па (при таких условиях с хорошей точностью можно считать, что воздух — идеальный газ). К сосуду подсоединён манометр, и имеется возможность изменять температуру воздуха внутри сосуда, помещая сосуд в воду. К сожалению, из-за неопытности экспериментатора, установка получилась негерметичной: она выпускает воздух, если разность давлений внутри и снаружи превысит некоторое критическое значение ΔP. Сначала газ в сосуде медленно нагрели до температуры $T_1 = 323$ К, затем медленно охладили. При этом давление в сосуде оказалось на $\Delta P_1 = 3$ кПа меньше атмосферного. Какую разность давлений ΔP_2 измерит юный экспериментатор, если проделает тот же эксперимент, только нагревая газ до температуры $T_2 = 353$ К? Начальное давление газа вновь равно атмосферному. Изменением объёма сосуда при всех происходящих в эксперименте процессах можно пренебречь.



Поясняющий рисунок: сосуд с воздухом в воде, манометр и «щель», которая выпускает воздух при избытке давления больше ΔP.

▲ **Решение. Что происходит.** Объём сосуда постоянный, давление пропорционально νT. При нагреве давление растёт; как только избыток над атмосферным достиг ΔP, щель начинает выпускать воздух, и дальше давление держится равным $P + \Delta P$: нагрев продолжается, а лишний газ

уходит. Когда газ остывает, давление падает, щель закрывается, и количество газа больше не меняется. Чем до более высокой температуры грели, тем больше газа ушло и тем ниже давление после остывания. Это задача на газ с переменной массой: уравнение Менделеева–Клапейрона для момента конца утечки и для момента после остывания.

Обозначения. V — объём сосуда; T_0 — начальная (комнатная) температура, до неё газ и остывает; ν_1, ν_2 — количество газа в сосуде после утечки в первом и втором опытах.

1. Конец утечки. Пока газ нагревали от момента начала утечки до T_1, давление было $P + \Delta P$. В момент, когда нагрев закончился при T_1, в сосуде осталось ν_1 молей; уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$(P + \Delta P)V = \nu_1 R T_1.$$

2. После остывания. Газ остывает изохорно, без утечки (давление внутри меньше $P + \Delta P$), до T_0:

$$(P - \Delta P_1)V = \nu_1 R T_0.$$

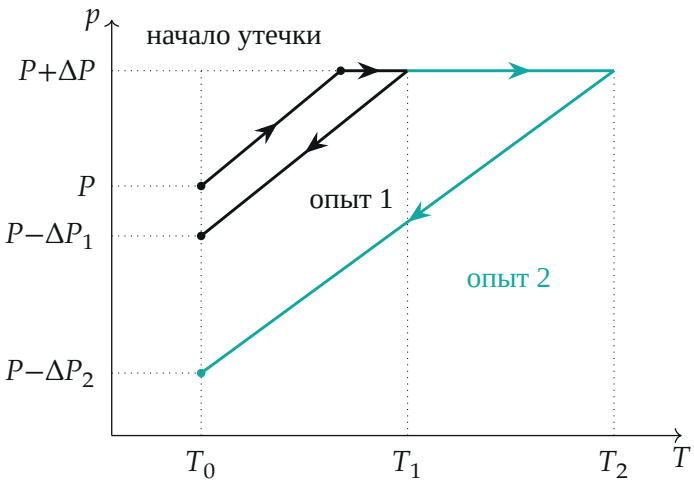
Делим второе уравнение на первое — уходят V, R и неизвестное ν_1:

$$\frac{P - \Delta P_1}{P + \Delta P} = \frac{T_0}{T_1}.$$

3. Второй опыт. Всё то же, только нагрев до T_2 и в сосуде остаётся ν_2:

$$\frac{P - \Delta P_2}{P + \Delta P} = \frac{T_0}{T_2}.$$

На рисунке 2 оба опыта в осях p–T: подъём по изохоре, горизонтальный участок утечки при $P + \Delta P$, спуск по новой, более пологой изохоре (газа меньше).

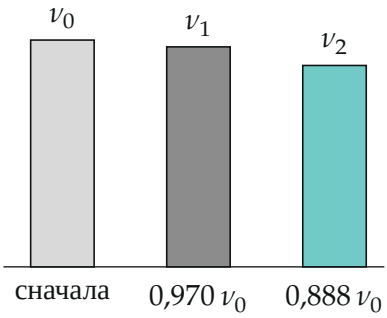


Процессы в осях p–T (по вычисленным точкам, $T_0 = 293$ K для наглядности): чем горячее нагрев, тем больше газа уходит и тем ниже давление после остывания.

4. Исключаем ΔP и T_0. Обе неизвестные — в правой части и в знаменателе слева. Делим уравнение шага 3 на уравнение шага 2:

$$\frac{P-\Delta P_2}{P-\Delta P_1}=\frac{T_1}{T_2} \quad\Longrightarrow\quad \Delta P_2 = P-(P-\Delta P_1)\frac{T_1}{T_2} = P\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right)+\Delta P_1\frac{T_1}{T_2}.$$

Физический смысл деления: в конце утечки в обоих опытах одно и то же давление $P+\Delta P$, поэтому $\nu_1 T_1 = \nu_2 T_2$ — газа осталось обратно пропорционально температуре нагрева. После остывания до одной T_0 давления относятся как $\nu_2/\nu_1 = T_1/T_2$.



Количество газа в сосуде: сначала и после утечки в первом и втором опытах; $\nu_1/\nu_0 = (P - \Delta P_1)/P$, $\nu_2/\nu_1 = T_1/T_2$.

5. Числа.

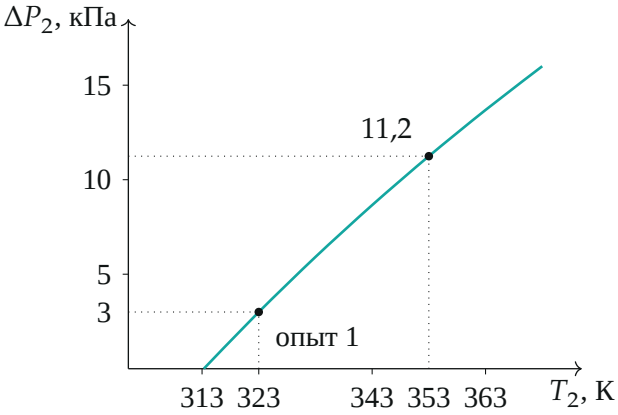
$$\Delta P_2 = 100\text{ кПа} - 97\text{ кПа} \cdot \frac{323}{353} = 100\text{ кПа} - 88{,}76\text{ кПа} \approx 11{,}2\text{ кПа}.$$

Давление в сосуде будет на 11,2 кПа *ниже* атмосферного.

6. Когда началась утечка. Пока утечки нет, $p \propto T$ при $\nu_0 = PV/(RT_0)$; утечка начинается при $T_* = T_0(P + \Delta P)/P$. Из шага 2 $T_0(P + \Delta P) = T_1(P - \Delta P_1)$, значит

$$T_* = T_1 \frac{P - \Delta P_1}{P} = 323 \cdot 0{,}97\text{ K} \approx 313\text{ K} < T_1 < T_2,$$

утечка в обоих опытах действительно была, и формула шага 4 применима. На рисунке 3 — ΔP_2 как функция температуры нагрева T_2: при $T_2 = T_*$ утечки нет и $\Delta P_2 = 0$.



Разрежение после остывания в зависимости от температуры нагрева: $\Delta P_2 = P - (P - \Delta P_1)T_1/T_2$.

Обратите внимание. Ни T_0, ни ΔP в условии не даны и для ответа не нужны: они сокращаются при делении уравнений. По условию щель только *выпускает* воздух: при остывании давление ниже $P + \Delta P$, наружу

газ не идёт, а внутрь щель его не пускает, поэтому ν после нагрева не меняется.

Ответ:

$$\Delta P_2 = P\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) + \Delta P_1 \frac{T_1}{T_2} \approx 11{,}2 \text{ кПа}.$$

Проверка. Размерность — давление. При $T_2 = T_1$ получаем $\Delta P_2 = \Delta P_1$, как и должно быть для того же опыта. При $T_2 \to \infty$ почти весь газ уходит, $\Delta P_2 \to P$ — после остывания в сосуде почти вакуум. Наш ответ между этими пределами: $3 < 11{,}2 < 100$ кПа.

Ответ. $\Delta P_2 = P\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) + \Delta P_1 \frac{T_1}{T_2} \approx 11{,}2$ кПа (давление на 11,2 кПа ниже атмосферного).