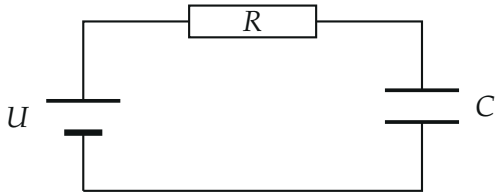
Быстрое сближение обкладок в цепи с резистором

Задача 5. [Курчатов 2013/14, 10 класс, задача 5] Плоский конденсатор ёмкостью $C = 22$ пФ, резистор с сопротивлением $R = 10$ МОм и идеальный источник напряжения номиналом $U = 100$ В соединены последовательно. Расстояние между обкладками быстро уменьшают в $n = 2$ раза. Найдите тепло Q, которое выделится после этого на резисторе.



Поясняющий рисунок: источник U, резистор R и конденсатор C последовательно.

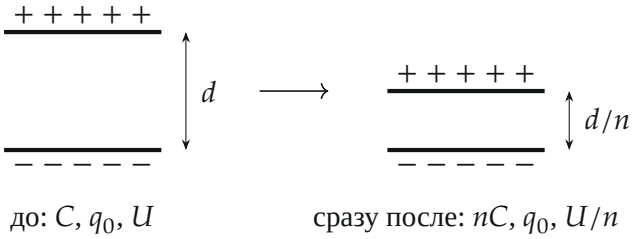
▲ **Решение. Что происходит.** До сдвига ток не идёт, конденсатор заряжен до напряжения источника: $q_0 = CU$. Обкладки сдвигают быстро — ток за это время не успевает протечь, заряд остаётся q_0, а ёмкость становится nC; напряжение на конденсаторе падает до U/n. Теперь источник «сильнее» конденсатора, и через резистор течёт ток дозарядки, пока напряжение снова не станет U. Тепло выделяется только на этом втором этапе. Это задача на энергетический баланс цепи: работа источника = изменение энергии конденсатора + тепло.

Обозначения. $q_0 = CU$ — заряд до сдвига; $C_1 = nC$ — ёмкость после сдвига; q_1 — заряд в конце; $\Delta q = q_1 - q_0$ — заряд, прошедший через источник; W — энергия конденсатора.

1. Быстрый сдвиг. Ёмкость плоского конденсатора $C = \varepsilon_0 S/d$; расстояние уменьшили в n раз — ёмкость выросла в n раз (рисунок 2). «Быстро» значит: за время сдвига (много меньше RC_1) через резистор не проходит заметный заряд, поэтому сразу после сдвига

$$q = q_0 = CU, \qquad U_C = \frac{q_0}{nC} = \frac{U}{n}, \qquad W_{\text{после сдвига}} = \frac{q_0^2}{2nC} = \frac{CU^2}{2n}.$$

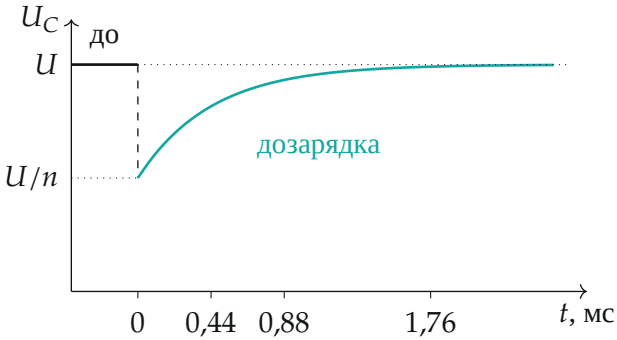
Тепла на резисторе за время сдвига нет (тока нет). Энергия конденсатора уменьшилась с $CU^2/2$ до $CU^2/(2n)$ — это отрицательная работа того, кто сдвигал притягивающиеся обкладки, а не тепло.



Быстрый сдвиг обкладок: заряд прежний, ёмкость в n раз больше, напряжение в n раз меньше.

2. Дозарядка. Теперь в контуре ЭДС U больше напряжения конденсатора U/n, и ток идёт, пока U_C не станет равным U (рисунок 3, время установления $\tau = RnC = 0{,}44$ мс). В конце

$$q_1 = nCU, \qquad \Delta q = q_1 - q_0 = (n-1)CU.$$



Напряжение на конденсаторе: скачок вниз при быстром сдвиге ($t = 0$), затем дозарядка до U с $\tau = nRC$ (по вычисленным точкам).

3. Закон сохранения энергии для цепи на этапе дозарядки. Источник совершает работу $A = U\Delta q$ (напряжение источника постоянно);

она идёт на рост энергии конденсатора и тепло на резисторе:

$$U\Delta q = \left(\frac{q_1^2}{2nC} - \frac{q_0^2}{2nC}\right) + Q.$$

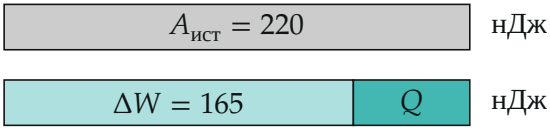
Обе энергии — при одной и той же ёмкости nC: обкладки уже не двигаются.

$$Q = (n-1)CU^2 - \frac{n^2C^2U^2 - C^2U^2}{2nC},$$

$$Q = (n-1)CU^2 - \frac{(n^2-1)CU^2}{2n} = \frac{(n-1)^2}{2n}CU^2.$$

Числа (рисунок 4): $A = (n-1)CU^2 = 220$ нДж, $\Delta W = \frac{(n^2-1)CU^2}{2n} =$ 165 нДж,

$$Q = \frac{(2-1)^2}{2\cdot 2}\cdot 22\cdot 10^{-12}\ \text{Ф}\cdot(100\ \text{В})^2 = 55\cdot 10^{-9}\ \text{Дж} = 55\ \text{нДж}.$$



Энергетический баланс этапа дозарядки: работа источника делится на рост энергии конденсатора и тепло $Q = 55$ нДж.

4. Второй способ — через «перепад напряжения». После сдвига контур — это заряд конденсатора ёмкостью $C_1 = nC$ через R от начального напряжения U/n до U. Тепло при таком процессе равно $\frac{1}{2}C_1(\Delta U)^2$, где ΔU — начальная разность ЭДС и напряжения конденсатора (баланс шага 3 для произвольного начального заряда). Здесь $\Delta U = U - U/n$:

$$Q = \frac{nC}{2}\left(U - \frac{U}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)^2}{2n}CU^2 = 55\ \text{нДж},$$

то же.

Обратите внимание. Энергию конденсатора после сдвига нельзя считать как $q_0^2/(2C)$ — ёмкость уже nC. И работу внешних сил при сдвиге нельзя записывать в тепло: тепло выделяется только тогда, когда идёт ток.

Ответ:

$$Q = \frac{(n-1)^2}{2n} CU^2 = 55 \text{ нДж}.$$

Проверка. Размерность: CU^2 — энергия. При $n = 1$ ничего не сдвигали, $Q = 0$. Сопротивление R в ответ не входит: от него зависит только время дозарядки, а не тепло — так и должно быть для заряда конденсатора через резистор.

Ответ. $Q = \frac{(n-1)^2}{2n} CU^2 = 55$ нДж.