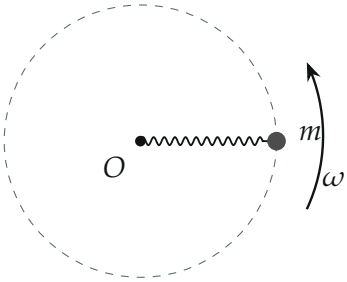
Грузик на резинке в невесомости

Задача 1. [Курчатов 2013/14, 11 класс, задача 1] В невесомости грузик массой m подвесили на резинку жесткостью k и раскрутили с угловой скоростью ω. Найдите относительное удлинение резинки, а также отношение энергии упругой деформации к кинетической энергии груза.



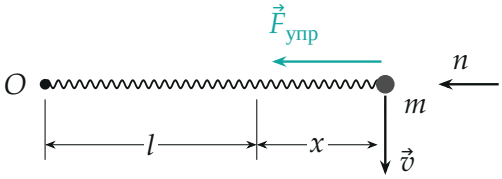
Поясняющий рисунок: конец резинки закреплён в точке O, грузик движется по окружности.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение по окружности под действием силы упругости. В невесомости на грузик действует только резинка; её сила направлена к центру и создаёт центростремительное ускорение. Чем быстрее вращение, тем больше нужна сила, тем сильнее растянута резинка, тем больше радиус — а значит, нужна ещё большая сила. Это самоусиление и даёт предел по ω.

Обозначения. l — длина нерастянутой резинки, x — её удлинение, $r = l + x$ — радиус окружности; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; $E_\text{у}$ — энергия упругой деформации, $E_\text{к}$ — кинетическая энергия груза. Ось n направлена от грузика к центру O.

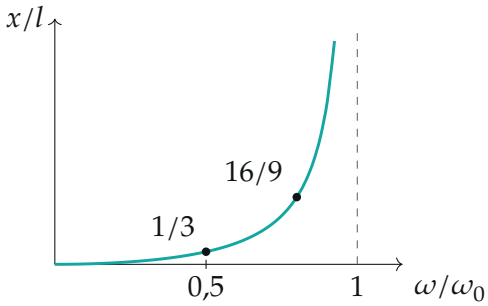
1. Удлинение. Второй закон Ньютона для грузика: $m\vec{a} = \vec{F}_\text{упр}$. Движение равномерное по окружности, ускорение центростремительное, $a_n = \omega^2 r$; в проекции на ось n по закону Гука $F_\text{упр} = kx$:

$$m\omega^2(l+x) = kx \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{m\omega^2 l}{k - m\omega^2}, \qquad \frac{x}{l} = \frac{m\omega^2}{k - m\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$



Единственная сила — сила упругости резинки, к центру. Радиус окружности — длина растянутой резинки $l + x$.

Ответ имеет смысл, только если $x > 0$, то есть $\omega < \omega_0 = \sqrt{k/m}$. При $\omega \to \omega_0$ удлинение неограниченно растёт: резинка не может удержать груз на окружности.

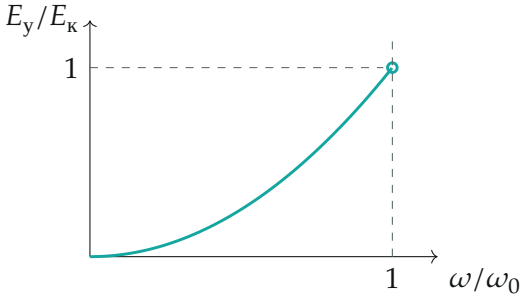


Относительное удлинение в зависимости от угловой скорости (по вычисленным точкам). При $\omega \to \omega_0$ удлинение уходит в бесконечность.

2. Отношение энергий. Энергия упругой деформации $E_{\text{у}} = \dfrac{kx^2}{2}$, кинетическая энергия груза $E_{\text{к}} = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m\omega^2 r^2}{2}$. Из пункта 1 $kx = m\omega^2 r$, то есть $x = \dfrac{m\omega^2}{k} r$. Тогда

$$\frac{E_{\text{у}}}{E_{\text{к}}} = \frac{kx^2}{m\omega^2 r^2} = \frac{k}{m\omega^2}\left(\frac{m\omega^2}{k}\right)^2 = \frac{m\omega^2}{k} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}.$$

Длина l сократилась — ответ от неё не зависит.



Отношение энергий растёт как $(\omega/\omega_0)^2$ и при $\omega \to \omega_0$ стремится к 1, но не достигается: при $\omega \geq \omega_0$ вращения с постоянным радиусом нет.

Обратите внимание. Из формулы $E_у/E_к = m\omega^2/k$ ограничение не видно: она «работает» при любом ω. Но при $\omega \geq \sqrt{k/m}$ равномерного вращения не бывает, и вопрос теряет смысл — это ограничение надо указать и для второго ответа.

Ответ:

$$\frac{x}{l} = \frac{m\omega^2}{k - m\omega^2}, \qquad \frac{E_у}{E_к} = \frac{m\omega^2}{k} \qquad \text{при } \omega < \sqrt{k/m};$$

при $\omega \geq \sqrt{k/m}$ резинка груз не удержит.

Проверка. Размерность: $m\omega^2/k$ — $\dfrac{\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{Н/м}}$, безразмерно. Предел: при $\omega \to 0$ резинка не растянута, $x \to 0$ и $E_у/E_к \to 0$. Второй способ для отношения: при $x \ll l$ $(\omega \ll \omega_0)$ $x \approx m\omega^2 l/k$, $E_у/E_к \approx kx^2/(m\omega^2 l^2) = m\omega^2/k$ — то же.

Ответ. При $\omega < \sqrt{k/m}$: $\dfrac{x}{l} = \dfrac{m\omega^2}{k - m\omega^2}$, $\dfrac{E_у}{E_к} = \dfrac{m\omega^2}{k}$; при $\omega \geq \sqrt{k/m}$ резинка не удержит груз.