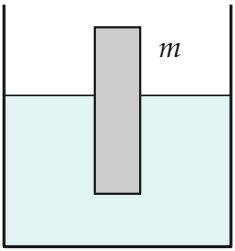
Колебания поплавка в стакане

Задача 2. [Курчатов 2013/14, 11 класс, задача 2] Однородный цилиндрический поплавок массой m и площадью сечения S плавает вертикально в стакане с водой. Поплавок слегка утопили, а затем отпустили, в результате чего поплавок начал колебаться. Найдите период этих колебаний. Плотность воды ρ, ускорение свободного падения g.



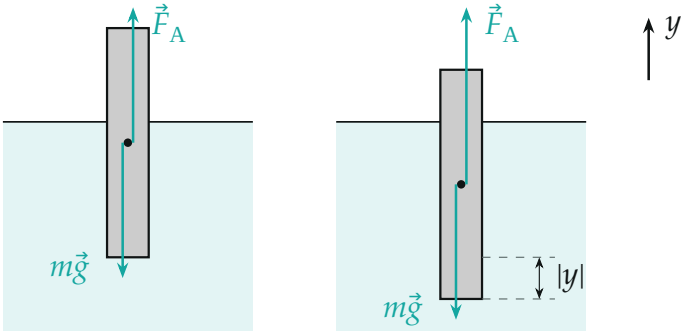
Поясняющий рисунок: поплавок плавает вертикально в стакане.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гармонические колебания. Если поплавок сместить из равновесия, сила тяжести не меняется, а сила Архимеда меняется пропорционально смещению — получается возвращающая сила, как у пружины с «жёсткостью» $\rho g S$. Шаблон такой: равновесие → второй закон Ньютона для смещения → уравнение $a = -\omega^2 y$ → период.

Обозначения. Ось y направлена вертикально вверх, начало — в положении центра масс поплавка в равновесии, y — смещение поплавка из равновесия; V_0 — объём погружённой части в равновесии; ω — циклическая частота, T — период. Стакан считаем широким по сравнению с поплавком: уровень воды при колебаниях почти не меняется (что будет иначе — в «Обратите внимание»).

1. Равновесие. Второй закон Ньютона для поплавка в покое, в проекции на ось y: сила Архимеда уравновешивает силу тяжести,

$$\rho g V_0 - mg = 0.$$



равновесие смещение вниз

Силы, действующие на поплавок: в равновесии и при смещении вниз на $|y|$. Сила тяжести та же, сила Архимеда выросла на $\rho g S|y|$.

2. Сила при смещении. Сместим поплавок на y (при $y < 0$ — вниз). Погружённый объём стал $V = V_0 - Sy$: поплавок цилиндрический, сечение S постоянно, и пока он не вынырнул целиком и не утонул, формула верна. Второй закон Ньютона в проекции на ось y:

$$ma_y = \rho g(V_0 - Sy) - mg = (\rho g V_0 - mg) - \rho g S y = -\rho g S y,$$

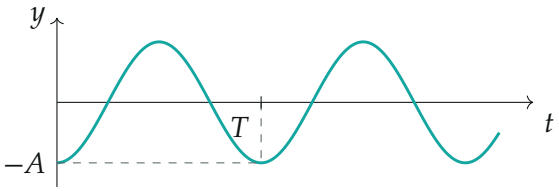
скобка равна нулю по пункту 1. Знак минус: сила всегда направлена к положению равновесия.

3. Период. Уравнение имеет вид

$$a_y = -\omega^2 y, \qquad \omega = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}},$$

— это уравнение гармонических колебаний, $y = A\cos(\omega t)$, где A — начальное смещение (поплавок отпустили без скорости). Период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

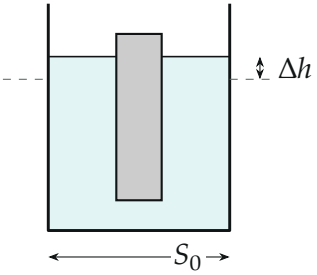


Смещение поплавка во времени: отпустили из нижнего положения $y = -A$ без скорости.

Обратите внимание. В стакане конечного сечения S_0 уровень воды тоже меняется: опустив поплавок на $|y|$, мы поднимаем уровень на $S|y|/(S_0 - S)$, и поплавок погружается на $|y|\,S_0/(S_0 - S)$. «Жёсткость» растёт до $\rho g S\,S_0/(S_0 - S)$, и

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\,(S_0 - S)}{\rho g S\,S_0}}.$$

S_0 в условии не дано — значит, стакан считается широким, $S_0 \gg S$, и получаем ответ выше.



Узкий стакан: при погружении поплавка уровень воды поднимается на Δh (пунктир — прежний уровень).

Ответ:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг}}{\text{кг/м}^3 \cdot \text{м/с}^2 \cdot \text{м}^2} = \text{с}^2$, под корнем — секунды в квадрате. Второй способ: поплавок — груз массы m на «пружине»

жёсткости $k = \rho g S$, а у пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ — то же. Смысл: тяжёлый поплавок колеблется медленнее, широкий — быстрее (сильнее меняется сила Архимеда).

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho g S}}$ (стакан широкий по сравнению с поплавком).