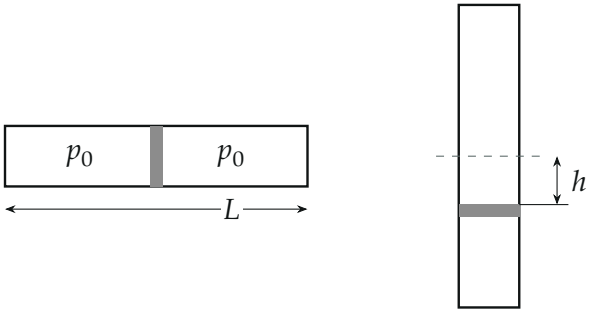
Поршень в горизонтальном сосуде поставили вертикально

Задача 3. [Курчатов 2013/14, 11 класс, задача 3] Цилиндрический сосуд длиной $L = 1{,}0$ м, расположенный горизонтально, разделён на две равные части подвижным массивным поршнем. По обе стороны от поршня находится идеальный газ при давлении p_0. Затем сосуд поставили вертикально, при этом поршень опустился на $h = 20$ см. Найдите давление p_0, если известна масса поршня $m = 10$ кг и его площадь $S = 10$ см^2. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Температура окружающей среды постоянна.



Поясняющий рисунок: сосуд горизонтально (поршень посередине) и вертикально (поршень опустился на h; пунктир — середина сосуда).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на изотермические процессы и равновесие поршня. Когда сосуд ставят вертикально, вес поршня сдвигает его вниз: нижний газ сжимается, верхний расширяется, пока разность давлений не уравновесит вес. Температура постоянна, количество газа в каждой части постоянно — для каждой части пишем закон Бойля–Мариотта, для поршня — условие равновесия. Неизвестных давлений три (p_0 и два новых), уравнений тоже три.

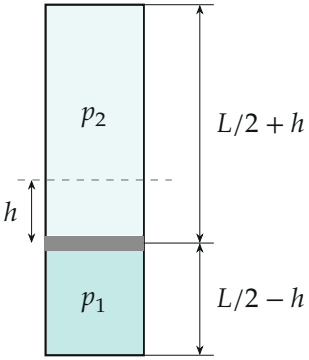
Обозначения. p_1 — давление газа под поршнем, p_2 — над поршнем (в вертикальном положении); ось y — вертикально вверх. Толщиной поршня пренебрегаем: длина каждой части в горизонтальном положении $L/2$.

1. Закон Бойля–Мариотта для каждой части. Масса газа в каждой части и температура не меняются, объём части — S, умноженная на её длину. Нижняя часть укоротилась до $L/2 - h$, верхняя удлинилась до $L/2 + h$:

$$p_0\frac{L}{2} = p_1\left(\frac{L}{2} - h\right) = p_2\left(\frac{L}{2} + h\right)$$

$$p_1 = p_0\frac{L}{L-2h}, \qquad p_2 = p_0\frac{L}{L+2h}.$$

Знак словами: снизу давление выросло, сверху упало.

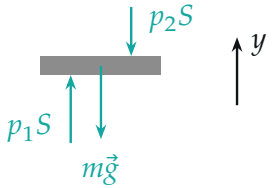


Вертикальный сосуд: длины частей и давления. Нижний газ сжат (темнее), верхний разрежен.

2. Равновесие поршня. Второй закон Ньютона для поршня в покое, в проекции на ось y: снизу газ давит силой p_1S вверх, сверху — p_2S вниз, сила тяжести mg вниз:

$$p_1S - p_2S - mg = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_1 - p_2 = \frac{mg}{S}.$$

Трение поршня о стенки не учитываем.



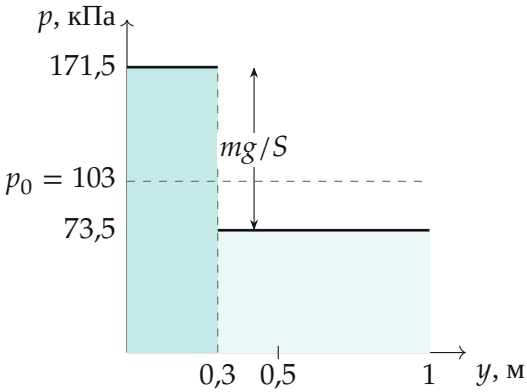
Силы, действующие на поршень: давление газа снизу и сверху, сила тяжести.

3. Давление p_0**.** Подставляем пункт 1 в пункт 2:

$$p_0\left(\frac{L}{L-2h}-\frac{L}{L+2h}\right)=\frac{mg}{S}\quad\Longrightarrow\quad p_0\,\frac{4Lh}{L^2-4h^2}=\frac{mg}{S},$$

$$p_0=\frac{mg}{S}\cdot\frac{L^2-4h^2}{4Lh}=\frac{10\cdot 9{,}8}{10^{-3}}\cdot\frac{1-0{,}16}{0{,}8}\text{ Па}=98\,000\cdot 1{,}05\text{ Па}\approx 103\text{ кПа}.$$

Отсюда $p_1=p_0\cdot\frac{1}{0{,}6}\approx 171{,}5$ кПа, $p_2=p_0\cdot\frac{1}{1{,}4}\approx 73{,}5$ кПа.



Давление по высоте вертикального сосуда (по вычисленным значениям). Скачок давления на поршне ($y = 0{,}3$ м) равен $mg/S = 98$ кПа; пунктир — начальное давление p_0.

Обратите внимание. Нельзя считать, что давление над поршнем осталось p_0: верхний газ тоже заперт и при расширении разрежается. Если забыть это, получится $p_1 = p_0 + mg/S$ и неверное $p_0 = mg(L-2h)/(2hS) = 147$ кПа.

Ответ:

$$p_0=\frac{mg}{S}\cdot\frac{L^2-4h^2}{4Lh}\approx 103\text{ кПа}.$$

Проверка. Размерность: Н/м$^2\cdot$м^2/м^2 = Па. Предел: при $h\to 0$ (очень «жёсткий» газ) $p_0\to\infty$ — чтобы поршень почти не сдвинулся, газ дол-

жен быть сильно сжат; при $h \to L/2$ поршень ложится на дно, $p_0 \to 0$. Подстановка: $p_1 - p_2 = 171{,}5 - 73{,}5 = 98$ кПа $= mg/S$ — сходится.

Ответ. $p_0 = \dfrac{mg}{S} \cdot \dfrac{L^2 - 4h^2}{4Lh} \approx 103$ кПа.