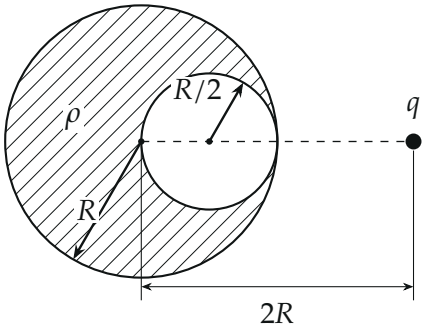
# Шар с полостью и точечный заряд

**Задача 4.** [Курчатов 2013/14, 11 класс, задача 4] Найдите силу, с которой равномерно заряженный шар со сферической полостью будет действовать на поднесённый к нему точечный заряд $q$. Радиус шара $R$, полости — $R/2$ (см. рисунок). Объёмная плотность заряда шара — $\rho$. Точечный заряд находится на расстоянии $2R$ от центра шара, на оси, соединяющей центры шара и полости. Будет ли заряд притягиваться или отталкиваться?

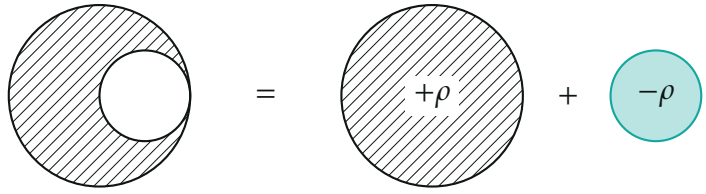



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на принцип суперпозиции с приёмом «дополнения»: полость — это не «дырка в формулах», а место, где заряд $+\rho$ и заряд $-\rho$ сложились в ноль. Значит, шар с полостью = сплошной шар радиуса $R$ с плотностью $\rho$ + шар радиуса $R/2$ с плотностью $-\rho$ на месте полости. Поле каждого сплошного шара снаружи — как у точечного заряда в его центре (теорема Гаусса), а силы складываются.

**Обозначения.** $O$ — центр шара, $O_1$ — центр полости, $A$ — точка, где заряд $q$; $Q_1$, $Q_2$ — заряды сплошного шара и «отрицательного» шарика; $F_1$, $F_2$ — их силы на $q$. Ось $x$ направлена от $O$ к $A$. По рисунку полость касается шара изнутри со стороны заряда, так что $OO_1 = R/2$ и $O_1A = 2R - R/2 = \frac{3}{2}R$.

**1. Разбиение на два шара.**

$$Q_1 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3, \qquad Q_2 = -\rho \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 = -\frac{Q_1}{8}.$$



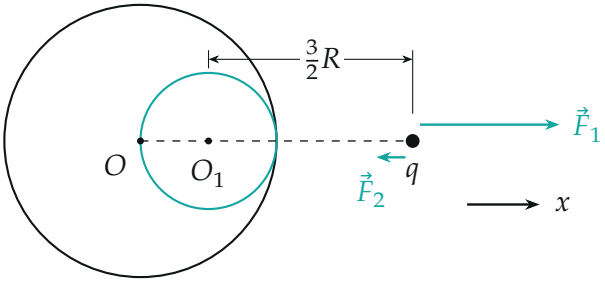

*Шар с полостью — сумма сплошного шара с плотностью $+\rho$ и шарика с плотностью $-\rho$ на месте полости (центры в $O$ и $O_1$).*

**2. Сила от каждого шара.** Сплошной равномерно заряженный шар вне себя создаёт поле точечного заряда в центре (по теореме Гаусса для сферы, концентричной шару). Закон Кулона, в проекции на ось $x$:

$$F_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 q}{(2R)^2} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3 q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 4R^2} = \frac{\rho q R}{12\varepsilon_0},$$

$$F_{2x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 q}{\left(\frac{3}{2}R\right)^2} = -\frac{\rho\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8} q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{9}{4}R^2} = -\frac{\rho q R}{54\varepsilon_0}.$$

Знак словами (при $\rho q > 0$): большой шар отталкивает заряд, «отрицательный» шарик притягивает.

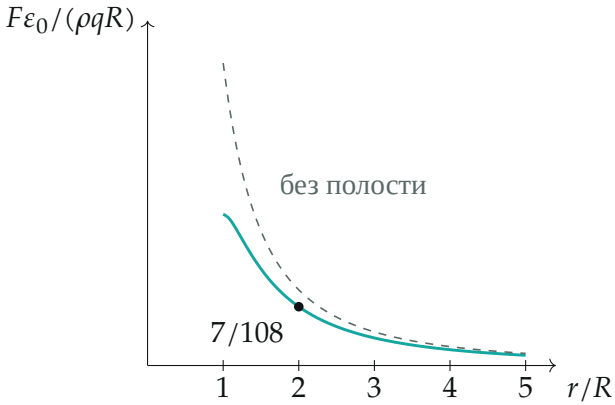



*Силы на заряд $q$ (при $\rho q > 0$) от двух шаров. Длины стрелок — в отношении $F_1 : |F_2| = 54 : 12 = 4{,}5$.*

**3. Суммарная сила.** По принципу суперпозиции

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = \frac{\rho q R}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{54}\right) = \frac{\rho q R}{\varepsilon_0} \cdot \frac{9-2}{108} = \frac{7}{108}\frac{\rho q R}{\varepsilon_0}.$$

$F_x > 0$ при $\rho q > 0$: заряд отталкивается, если знаки $\rho$ и $q$ одинаковы, и притягивается, если разные.




*Сила в зависимости от расстояния $r$ от центра шара до заряда (по вычисленным точкам); пунктир — сплошной шар. В точке $r = 2R$ получаем $7/108$.*

**Обратите внимание.** Расстояние до «отрицательного» шарика берётся от *его* центра $O_1$, а не от $O$: $\frac{3}{2}R$, а не $2R$. И полость стоит со стороны заряда — будь она с другой стороны, расстояние было бы $\frac{5}{2}R$ и ответ другим.

**Ответ:**

$$F = \frac{7}{108}\frac{\rho q R}{\varepsilon_0};$$

заряд отталкивается, если знаки $\rho$ и $q$ совпадают, и притягивается в противном случае.

**Проверка.** Размерность: $\dfrac{\text{Кл/м}^3 \cdot \text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2)} = \text{Н}$. Предел: без полости было бы $\frac{1}{12} = \frac{9}{108}$; полость убрала $\frac{1}{8}$ заряда, но она ближе к $q$, поэтому сила уменьшилась сильнее, чем на $\frac{1}{8}$: на $\frac{2}{9}$ — разумно.

**Ответ.** $F = \dfrac{7}{108}\dfrac{\rho q R}{\varepsilon_0}$; отталкивание, если знаки $\rho$ и $q$ совпадают, притяжение — если разные.