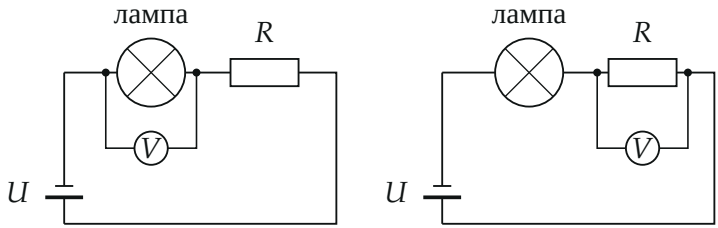
Газоразрядная лампа и неидеальный вольтметр

Задача 5. [Курчатов 2013/14, 11 класс, задача 5] Газоразрядная лампа, вольт-амперная характеристика которой (зависимость тока, текущего через лампу, от напряжения на ней) задана уравнением $I = kU^2$, подключена последовательно с резистором сопротивлением R к источнику постоянного напряжения U. Если подключить неидеальный вольтметр к лампе, то он покажет напряжение V_1, а если к резистору — V_2. Найдите коэффициент k.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на нелинейный элемент и неидеальный прибор. Вольтметр — обычный резистор неизвестного сопротивления r: через него ответвляется ток, и он меняет режим цепи. В каждом подключении запишем законы Кирхгофа; неизвестны k и r, показаний два — уравнений хватает; сопротивление вольтметра исключим, взяв отношение токов через него в двух опытах. Шаблон: напряжения на всех элементах → токи → узел → исключение r.

Обозначения. r — сопротивление вольтметра; I_{V1}, I_{V2} — токи через вольтметр в первом и втором подключении. Источник идеальный: напряжение на последовательной паре «лампа + резистор» всегда U.



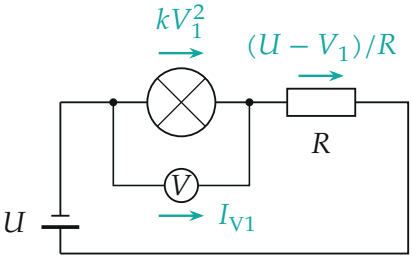
подключение 1: V_1 подключение 2: V_2

Поясняющий рисунок: вольтметр подключён параллельно лампе (слева) и параллельно резистору (справа).

1. Вольтметр на лампе. Вольтметр и лампа соединены параллельно, на обоих V_1; на резисторе — $U - V_1$ (сумма напряжений на последовательных участках равна U). Токи: через резистор по закону Ома $(U - V_1)/R$, через лампу по её характеристике kV_1^2. Закон сохранения

заряда для узла (первое правило Кирхгофа): ток резистора делится между лампой и вольтметром,

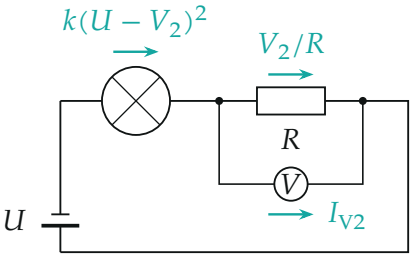
$$I_{V1} = \frac{U - V_1}{R} - kV_1^2.$$



Подключение 1: ток резистора $(U - V_1)/R$ делится на ток лампы и ток вольтметра.

2. Вольтметр на резисторе. Теперь параллельны вольтметр и резистор, на них V_2; на лампе $U - V_2$. Ток лампы $k(U - V_2)^2$, ток резистора V_2/R; ток лампы делится между резистором и вольтметром:

$$I_{V2} = k(U - V_2)^2 - \frac{V_2}{R}.$$



Подключение 2: ток лампы $k(U - V_2)^2$ делится на ток резистора и ток вольтметра.

3. Исключаем сопротивление вольтметра. Вольтметр — линейный резистор r: по закону Ома $I_{V1} = V_1/r$, $I_{V2} = V_2/r$. Отношение токов не содержит r:

$$\frac{I_{V1}}{I_{V2}} = \frac{V_1}{V_2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{U - V_1}{R} - kV_1^2\right) V_2 = \left(k(U - V_2)^2 - \frac{V_2}{R}\right) V_1.$$

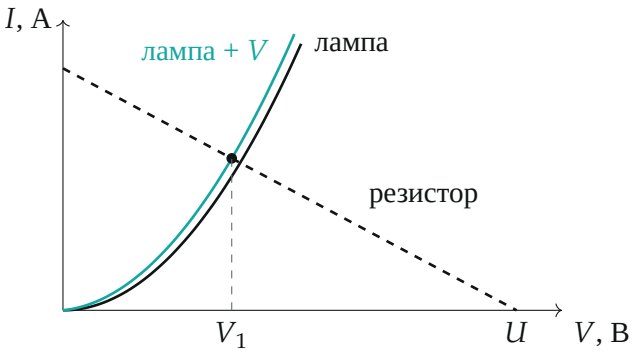
Уравнение линейно по k. Собираем слагаемые с k справа:

$$\frac{(U - V_1)V_2 + V_1V_2}{R} = k\left(V_1(U - V_2)^2 + V_1^2V_2\right)$$

откуда

$$\frac{UV_2}{R} = kV_1\left(V_1V_2 + (U - V_2)^2\right),$$

$$k = \frac{UV_2}{RV_1\left(V_1V_2 + (U - V_2)^2\right)}.$$



Подключение 1 графически, пример $k = 0{,}002$ А/В^2, $R = 100$ Ом, $r = 500$ Ом, $U = 20$ В (вычисленные кривые). Ток резистора (пунктир, $I = (U - V)/R$) равен сумме токов лампы и вольтметра (бирюза); пересечение даёт $V_1 \approx 7{,}44$ В.

Обратите внимание. Нельзя считать вольтметр идеальным: тогда было бы $V_1 + V_2 = U$, а в задаче показания независимы, и их сумма меньше U — вольтметр, подключённый параллельно элементу, уменьшает напряжение на нём.

Ответ:

$$k = \frac{UV_2}{RV_1\left(V_1V_2 + (U - V_2)^2\right)}.$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{В}^2}{\text{Ом} \cdot \text{В}^3} = \dfrac{\text{А}}{\text{В}^2}$ — как у k в $I = kU^2$. Предел идеального вольтметра: $V_1 + V_2 = U$, тогда ток лампы $kV_1^2 = V_2/R$; формула даёт $k = \dfrac{UV_2}{RV_1(V_1V_2 + V_1^2)} = \dfrac{UV_2}{RV_1^2U} = \dfrac{V_2}{RV_1^2}$ — то же. Численно: для примера с рисунка ($k = 0{,}002$, $R = 100$, $r = 500$, $U = 20$) расчёт цепи даёт $V_1 \approx 7{,}440$ В, $V_2 \approx 11{,}642$ В, и формула возвращает $k = 0{,}00200$.

Ответ. $k = \dfrac{UV_2}{RV_1\left(V_1V_2 + (U - V_2)^2\right)}$.