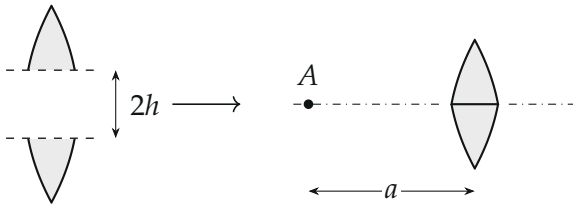
Билинза Бийе

Задача 6. [Курчатов 2013/14, 11 класс, задача 6] Из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 15$ см вырезали центральную часть шириной $2h = 2$ мм (см. рис.), а затем симметрично сдвинули оставшиеся части до соприкосновения, изготовив так называемую «билинзу Бийе». Точечный источник света с длиной волны $\lambda = 711$ нм поместили на расстоянии $a = 20$ см от билинзы на её оси симметрии.



Поясняющий рисунок: из линзы вырезают полосу ширины $2h$, половинки сдвигают до касания; источник A — на оси симметрии.

1. Где находятся изображения, даваемые билинзой? Сделайте построение хода лучей и определите расстояния от изображений до линзы и до её оси.
2. Каков будет период интерференционных полос в центре экрана, поставленного в фокальной плоскости билинзы? Угол φ схождения интерферирующих лучей на экране можно считать малым, так что $\sin\varphi \approx \varphi$.
3. Оцените число N интерференционных полос, наблюдаемых на этом экране.

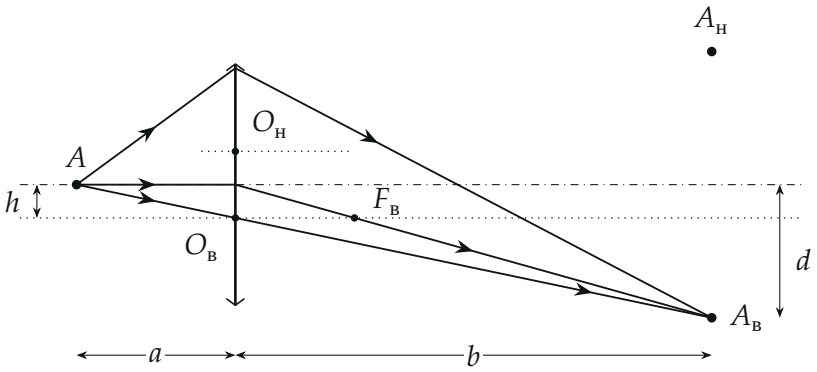
▲ **Решение. Что происходит.** Каждая половинка билинзы — кусок обычной тонкой линзы с фокусным расстоянием f, только её оптический центр (которого в куске нет) сдвинут с оси системы на h. Поэтому половинки дают два изображения одного источника — два когерентных точечных источника. Свет от них перекрывается за линзой, и там видны интерференционные полосы, как в опыте Юнга. Класс задачи — «раздвоение источника», как бипризма Френеля.

Обозначения. Ось x — ось симметрии системы, линза в $x = 0$; $O_в$, $O_н$ — оптические центры верхней и нижней половинок, $F_в$, $F_н$ — их фокусы; $A_в$, $A_н$ — изображения, которые дают верхняя и нижняя половинки; b — расстояние от линзы до изображений, d — от изображений до оси.

Пункт 1.

1. Где оптические центры половинок. Верхнюю половинку сдвинули вниз на h, вместе с ней сдвинулась вниз и её главная оптическая ось: теперь она идёт на расстоянии h *под* осью системы, $O_в$ — в точке $(0; -h)$. Нижнюю сдвинули вверх, $O_н$ — в точке $(0; +h)$. Кусок линзы строит изображение так же, как целая линза (меняется только яркость).

2. Построение для верхней половинки (рисунок 2, вертикальный масштаб растянут). Луч $AO_в$ идёт через оптический центр и не преломляется. Луч, идущий от A вдоль оси системы, параллелен главной оптической оси верхней половинки, поэтому после неё проходит через фокус $F_в$, лежащий на этой оси, в точке $(f; -h)$. Пересечение двух лучей — изображение $A_в$, ниже оси. Нижняя половинка симметрично даёт $A_н$ выше оси.



Построение изображения $A_в$ в верхней половинке; третий луч — от края линзы.

3. Расстояние до изображений. Формула тонкой линзы для половин-

ки (расстояние вдоль оси до предмета a, до изображения b):

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \quad\Longrightarrow\quad b=\frac{af}{a-f}=\frac{20\cdot 15}{20-15}\text{ см}=60\text{ см}.$$

$b>0$: изображения действительные, справа от линзы.

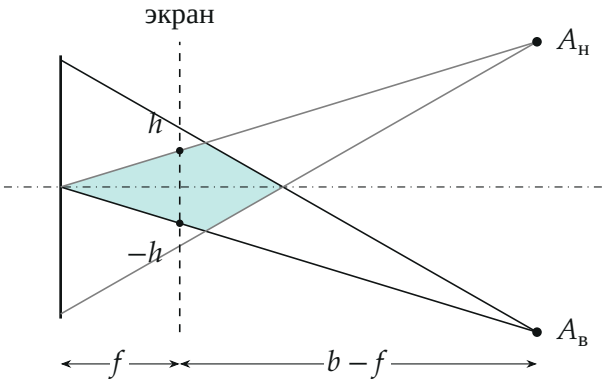
4. Расстояние до оси. Относительно своей главной оси источник поднят на h, изображение опущено на hb/a (поперечное увеличение b/a, изображение перевёрнуто). От оси системы

$$d=h+h\frac{b}{a}=h\frac{a+b}{a}=h\frac{a}{a-f}=1\text{ мм}\cdot\frac{20}{5}=4\text{ мм}.$$

Изображения $A_\text{в}$ и $A_\text{н}$ — по разные стороны оси, расстояние между ними $2d=8$ мм.

Пункт 2.

5. Где пучки перекрываются. Лучи, прошедшие верхнюю половинку, сходятся в $A_\text{в}$, нижнюю — в $A_\text{н}$ (рисунок 3). Внутреннюю границу каждого пучка задаёт луч от стыка половинок (точка $x=0$, $y=0$). В фокальной плоскости $x=f$ луч от стыка к $A_\text{в}$ опускается на $df/b=4\text{ мм}\cdot 15/60=1\text{ мм}=h$. Значит, в фокальной плоскости верхний пучок занимает $y\geqslant -h$, нижний — $y\leqslant h$; оба пучка есть на полосе $-h\leqslant y\leqslant h$ ширины $2h$ (заштрихованная область). Только там и видна интерференция.



Пучки от верхней (чёрные) и нижней (серые) половинок; область перекрытия заштрихована.

6. Два когерентных источника. В точку экрана приходят два луча: один идёт к $A_в$, другой к $A_н$. По обратимости хода лучей разность их путей до экрана — та же, что у лучей, вышедших из точек $A_в$ и $A_н$ *назад* к экрану: путь от экрана до точки схождения меняется на ту же величину, что и путь от точки схождения до экрана. Задача свелась к двум источникам на расстоянии $2d$ друг от друга и на расстоянии $L = b - f$ от экрана (рисунок 4):

$$L = b - f = \frac{af}{a - f} - f = \frac{f^2}{a - f} = 45 \text{ см}.$$

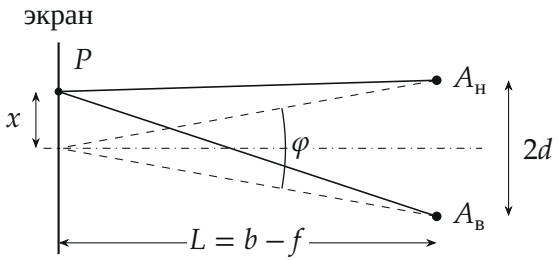
7. Разность хода в точке x. Пусть точка экрана смещена от оси на x. Расстояния до источников

$$r_{1,2} = \sqrt{L^2 + (d \pm x)^2} \approx L + \frac{(d \pm x)^2}{2L}$$

($d \pm x \ll L$ — малость угла φ). Разность хода

$$\Delta = r_1 - r_2 \approx \frac{(d + x)^2 - (d - x)^2}{2L} = \frac{2d}{L} x = \varphi x, \qquad \varphi \approx \frac{2d}{L}.$$

Здесь φ — угол, под которым из центра экрана видны оба источника, то есть угол схождения интерферирующих лучей. Второй способ (рисунок 4): при сдвиге на x один луч удлиняется, другой укорачивается на $x \sin(\varphi/2) \approx x\varphi/2$, вместе — $x\varphi$.



Эквивалентная схема: два когерентных источника и точка P экрана.

8. Период полос. Максимумы там, где $\Delta = m\lambda$, m — целое; соседние максимумы отстоят на Δx, при котором Δ меняется на λ: $\varphi\,\Delta x = \lambda$. Подставим $d = ha/(a-f)$ и $L = f^2/(a-f)$:

$$\varphi = \frac{2d}{L} = \frac{2ha}{f^2} = \frac{2\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}2}{0{,}15^2} \approx 1{,}78\cdot 10^{-2},$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi} = \frac{\lambda f^2}{2ha} = \frac{7{,}11\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}15^2}{2\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}2}\ \text{м} \approx 40{,}0\ \text{мкм}.$$

Пункт 3.

9. Число полос. Картина занимает на экране полосу ширины $2h$ (шаг 5), в центре $\Delta = 0$ — светлая полоса. На ширине $2h$ укладывается

$$\frac{2h}{\Delta x} = \frac{4h^2a}{\lambda f^2} = \frac{2000\ \text{мкм}}{40{,}0\ \text{мкм}} \approx 50$$

периодов, по 25 в каждую сторону от центра. Светлых полос — на одну больше, считая центральную:

$$N = \frac{4h^2a}{\lambda f^2} + 1 \approx 51.$$

Обратите внимание. Ширина картины в фокальной плоскости не зависит от размера линзы: её задают лучи от стыка половинок ($df/b = h$ при любом a).

Проверка. Размерность: $\lambda f^2/(ha)$ — длина. Предел $h \to 0$: изображения сливаются ($d \to 0$), полосы расходятся бесконечно ($\Delta x \to \infty$), картина исчезает — без выреза билинза становится обычной линзой. Точная разность хода (python) при $x = 40$ мкм равна $0{,}711$ мкм $= \lambda$.

Ответ. 1) изображения действительные, $b = \dfrac{af}{a-f} = 60$ см от линзы, по разные стороны оси, $d = \dfrac{ha}{a-f} = 4$ мм от неё; 2) $\Delta x = \dfrac{\lambda f^2}{2ha} \approx 40$ мкм; 3) $N \approx 51$.