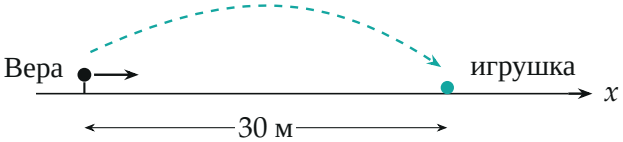
Вера и собака Юлта

Задача 1. [Курчатов 2013/14, 7 класс, задача 1] Каждое утро девочка Вера выгуливает свою собаку Юлту. Поскольку Юлта любит побегать, Вера всегда берёт на прогулку игрушку, которую бросает перед собой, а Юлта бежит и приносит игрушку хозяйке. При этом Вера не стоит на месте, а идёт вперёд, и, как только Юлта принесёт игрушку, снова бросает её. За время прогулки Вера проходит 1500 м, а Юлта пробегает 6000 м. Сколько раз за прогулку Вера бросает игрушку, если игрушка всегда улетает вперёд на 30 м, а Вера и Юлта двигаются с постоянными скоростями.



Поясняющий рисунок: Вера бросает игрушку на 30 м вперёд и продолжает идти.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равномерное движение и сравнение путей. Между двумя соседними бросками Вера проходит одно и то же расстояние: всё повторяется, только сдвинутое вперёд. Значит, число бросков равно всему пути Веры, делённому на путь Веры за один цикл. А путь за цикл найдём из того, что за одно и то же время пути пропорциональны скоростям.

Обозначения. v — скорость Веры, u — скорость Юлты; $L_\text{В} = 1500$ м и $L_\text{Ю} = 6000$ м — их пути за прогулку; $l = 30$ м — дальность броска; x — путь Веры за один цикл (от броска до броска), N — число бросков. Ось x направлена вперёд, по ходу Веры.

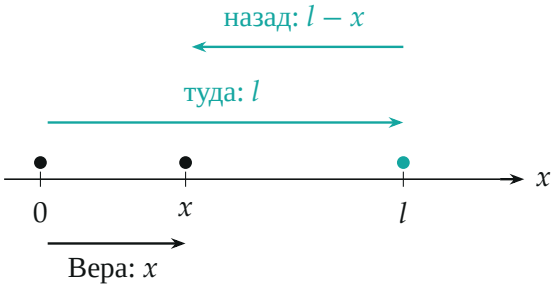
1. Отношение скоростей. Вера и Юлта движутся равномерно и гуляют одно и то же время t, поэтому $L_\text{В} = vt$, $L_\text{Ю} = ut$, и

$$\frac{u}{v} = \frac{L_\text{Ю}}{L_\text{В}} = \frac{6000}{1500} = 4.$$

Значит, и за любой отрезок времени Юлта пробегает в 4 раза больший путь, чем проходит Вера.

2. Пути за один цикл. Возьмём начало оси в точке, где Вера бросила игрушку. Игрушка лежит в точке $l = 30$ м. Юлта стартует от Веры, добегает до игрушки (путь l) и бежит назад до Веры, которая к этому моменту дошла до точки x (путь $l - x$). Путь Юлты за цикл

$$s_{Ю} = l + (l - x) = 2l - x.$$

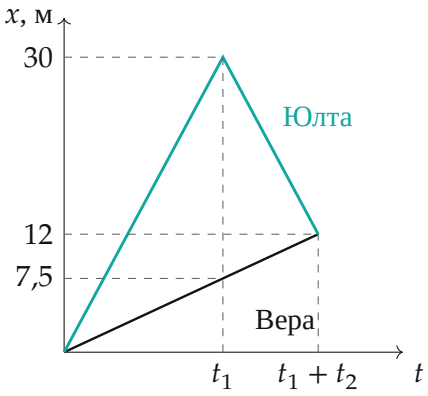


Один цикл. Вверху — путь Юлты (бирюзой), внизу — путь Веры. Точки: Вера в момент броска (0) и в момент возвращения Юлты (x), игрушка (l).

3. Путь Веры за цикл. Цикл длится одно и то же время для обеих, поэтому по пункту 1 путь Юлты в 4 раза больше пути Веры:

$$2l - x = 4x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2l}{5} = \frac{2 \cdot 30\ \text{м}}{5} = 12\ \text{м}.$$

Это же можно сказать так: вместе за цикл они проходят $2l = 60$ м, и эти 60 м делятся в отношении 1 : 4, на долю Веры — пятая часть.

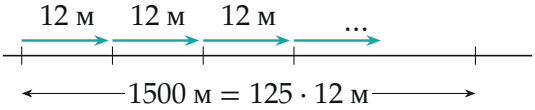


Графики координат за один цикл (по вычисленным точкам). Юлта добегает до игрушки в момент t_1, когда Вера прошла 7,5 м, и встречает Веру в точке 12 м.

Второй способ (по времени). Юлта бежит к игрушке время $t_1 = l/u$; Вера за это время проходит $vt_1 = l/4 = 7{,}5$ м. Между ними остаётся $l - l/4 = 22{,}5$ м, они сближаются со скоростью $u + v = 5v$, время $t_2 = 22{,}5\text{ м}/(5v)$, и Вера проходит ещё $22{,}5/5 = 4{,}5$ м. Всего $7{,}5 + 4{,}5 = 12$ м — то же самое.

4. Число бросков. Каждый цикл начинается броском, и цикл за циклом Вера проходит по x:

$$N = \frac{L_\text{В}}{x} = \frac{1500\text{ м}}{12\text{ м}} = 125.$$



Путь Веры за прогулку складывается из одинаковых отрезков по 12 м, каждый начинается броском.

Обратите внимание. Время полёта игрушки не учитываем: она считается упавшей сразу, а Юлта стартует от Веры одновременно с броском — так поставлена задача. Тогда путь Юлты за цикл — не $2l$, а $2l - x$: Вера идёт навстречу возвращающейся собаке.

Ответ:

$$N = \frac{L_\text{В}}{x} = \frac{L_\text{В}}{2l}\left(1 + \frac{L_\text{Ю}}{L_\text{В}}\right) = \frac{L_\text{В} + L_\text{Ю}}{2l} = \frac{7500}{60} = 125.$$

Проверка. Пути сразу за всю прогулку: за каждый цикл Вера и Юлта вместе проходят $2l = 60$ м, а за всю прогулку вместе $1500 + 6000 = 7500$ м, это $7500/60 = 125$ циклов — сходится. Предел: если бы Вера стояла ($L_\text{В} \to 0$), Юлта пробегала бы за цикл ровно 60 м — формула даёт $L_\text{Ю}/(2l)$, как и должно быть.

Ответ. 125 раз.