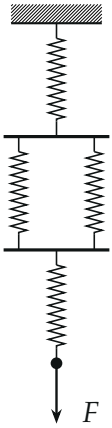
Система пружин

Задача 2. [Курчатов 2013/14, 7 класс, задача 2] Пружины, жёсткость каждой из которых $k = 10$ Н/м, соединены как показано на рисунке. С какой силой F нужно растягивать систему, чтобы точка приложения силы опустилась на 10 см?



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Гука для соединения пружин. Опускание точки приложения силы складывается из удлинений пружин, через которые проходит «цепочка» сверху вниз: верхняя, одна из средних (обе средние растянуты одинаково) и нижняя. Удлинение каждой пружины найдём по закону Гука, а силу натяжения — из равновесия перекладин.

Обозначения. T_1, T_2, T_3 — силы натяжения верхней, каждой из средних и нижней пружин; x_1, x_2, x_3 — их удлинения; $\Delta = 10$ см $= 0{,}1$ м — опускание точки приложения силы. Пружины и перекладины считаем лёгкими, ось y — вертикально вниз.

1. Силы натяжения. Нижняя пружина лёгкая, поэтому сила натяжения одинакова по всей её длине и равна приложенной силе: $T_3 = F$.

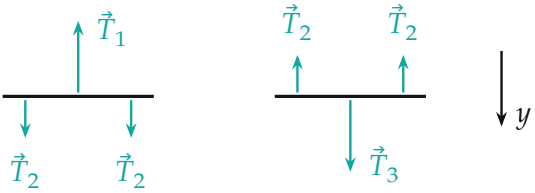
Второй закон Ньютона для нижней перекладины (лёгкой, поэтому сумма сил на неё равна нулю) в проекции на ось y: вниз её тянет нижняя пружина силой T_3, вверх — две средние по T_2 (средние пружины

одинаковые и растянуты одинаково, перекладина не перекашивается):

$$T_3 - 2T_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad T_2 = \frac{F}{2}.$$

Так же для верхней перекладины: вниз — две средние по T_2, вверх — верхняя пружина T_1:

$$2T_2 - T_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad T_1 = F.$$



верхняя перекладина нижняя перекладина

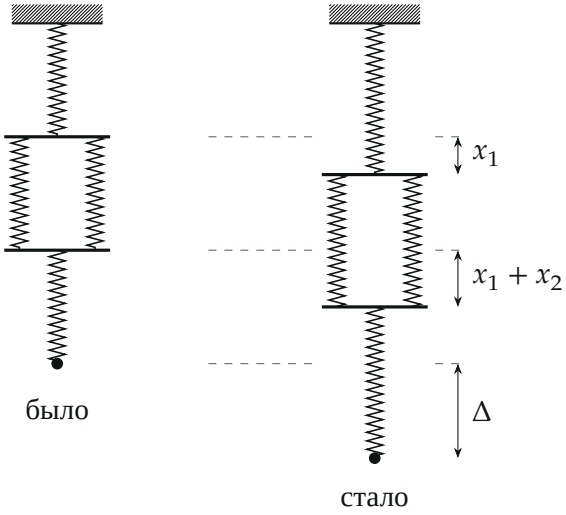
Силы, действующие на перекладины со стороны пружин. Длины стрелок — по модулю: $T_1 = T_3 = 2T_2$.

2. Удлинения. Закон Гука для каждой пружины ($T = kx$):

$$x_1 = \frac{F}{k}, \qquad x_2 = \frac{F}{2k}, \qquad x_3 = \frac{F}{k}.$$

3. Опускание точки приложения силы. Верхний конец верхней пружины закреплён. Верхняя перекладина опустилась на x_1, нижняя — ещё на x_2 ниже, точка приложения силы — ещё на x_3:

$$\Delta = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{F}{k} + \frac{F}{2k} + \frac{F}{k} = \frac{5F}{2k}.$$



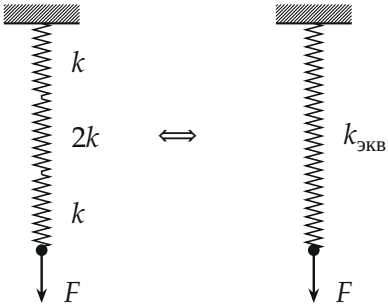
Было и стало. Пунктир — прежние положения перекладин и точки приложения силы. Каждая следующая точка опускается на сумму удлинений всех пружин над ней.

Отсюда

$$F = \frac{2k\Delta}{5} = \frac{2 \cdot 10\ \text{Н/м} \cdot 0{,}1\ \text{м}}{5} = 0{,}4\ \text{Н}.$$

Второй способ: эквивалентная жёсткость. Две параллельные одинаковые пружины растягиваются одинаково, а сила делится пополам — они работают как одна пружина жёсткостью $2k$. Последовательные пружины несут одну силу, удлинения складываются, поэтому складываются величины $1/k$:

$$\frac{1}{k_{\text{экв}}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} = \frac{5}{2k}, \qquad k_{\text{экв}} = \frac{2k}{5} = 4\ \text{Н/м}, \qquad F = k_{\text{экв}}\Delta = 0{,}4\ \text{Н}.$$



Эквивалентные схемы: пара параллельных пружин заменена одной жёсткостью $2k$, затем три последовательные — одной.

Обратите внимание. Удлинение пары параллельных пружин входит в сумму один раз, а не дважды: обе средние пружины растянуты одинаково, и нижняя перекладина опускается вместе с концами обеих.

Ответ:

$$F = \frac{2k\Delta}{5} = 0{,}4\ \text{Н}.$$

Проверка. Размерность: Н/м · м = Н. Предел: если бы средних пружин было не две, а очень много, их удлинение стремилось бы к нулю и осталось бы две последовательные пружины, $\Delta = 2F/k$; у нас $\Delta = 2{,}5F/k$ — больше, как и должно быть с конечным числом средних пружин.

Ответ. $F = 0{,}4$ Н.