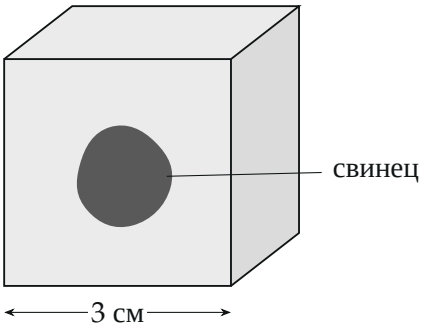
Шулер с кубиком-обманкой

Задача 3. [Курчатов 2013/14, 7 класс, задача 3] Шулер хочет пронести в казино игральный кубик, состоящий из пластика в форме куба с ребром 3 см, в который вплавлена свинцовая вставка неправильной формы массой 7 г. Сможет ли он это сделать, если для этого кубик должен весить не больше, чем кубик таких же габаритов плотностью $\rho_0 = 2{,}6$ г/см^3? Плотность свинца равна $\rho_{св} = 11{,}3$ г/см^3, плотность пластика $\rho_{пл} = 2{,}4$ г/см^3.



Поясняющий рисунок: пластиковый куб со свинцовой вставкой внутри.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на среднюю плотность тела из двух веществ. Свинец тяжелее пластика, поэтому кубик со вставкой тяжелее чисто пластикового того же размера. Вопрос в том, укладывается ли эта прибавка в допуск: эталонный кубик плотности ρ_0 тяжелее пластикового на $(\rho_0 - \rho_{пл})V_0$. Массы сравниваем, а не плотности, — так поставлен допуск; при одинаковом объёме это одно и то же.

Обозначения. $a = 3$ см — ребро, $V_0 = a^3$ — объём кубика; $m_{св} = 7$ г и $V_{св}$ — масса и объём свинца; $V_{пл}$ и $m_{пл}$ — объём и масса пластика; m — масса кубика шулера, m_0 — масса допустимого кубика.

1. Объём кубика и вставки.

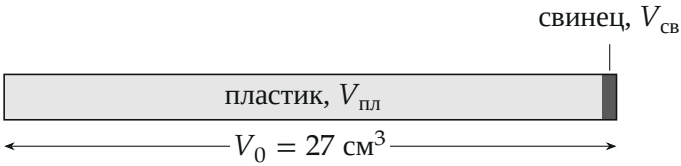
$$V_0 = a^3 = 27 \text{ см}^3, \qquad V_{св} = \frac{m_{св}}{\rho_{св}} = \frac{7}{11{,}3} \text{ см}^3 \approx 0{,}619 \text{ см}^3.$$

Форма вставки неправильная, но для объёма важна только масса и плотность свинца.

2. Пластик. Пластик занимает весь куб, кроме вставки:

$$V_{\text{пл}} = V_0 - V_{\text{св}} \approx 27 - 0{,}619 = 26{,}381 \text{ см}^3,$$

$$m_{\text{пл}} = \rho_{\text{пл}} V_{\text{пл}} \approx 2{,}4 \cdot 26{,}381 \approx 63{,}31 \text{ г}.$$

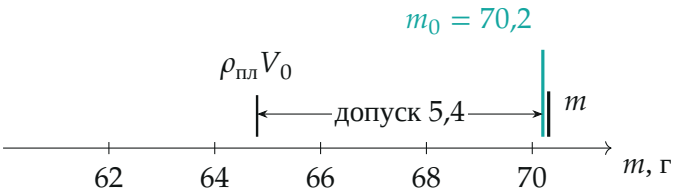


Объём кубика в масштабе: свинец занимает лишь 0,62 см^3 из 27, но весит 7 г.

3. Масса кубика шулера и допустимая масса.

$m = m_{\text{пл}} + m_{\text{св}} \approx 63{,}31 + 7 = 70{,}31$ г, $\quad m_0 = \rho_0 V_0 = 2{,}6 \cdot 27 = 70{,}2$ г.

$m > m_0$ — кубик тяжелее допустимого на 0,11 г.

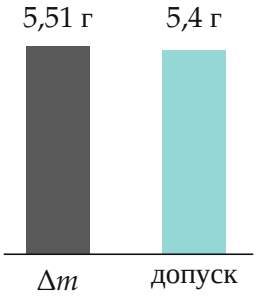


Массы на одной шкале: допуск над чисто пластиковым кубиком — 5,4 г, свинец добавляет 5,51 г; кубик шулера (m) правее границы m_0.

Второй способ (через «прибавку» от свинца). Свинец вытеснил пластик своего объёма, поэтому кубик тяжелее чисто пластикового на

$$\Delta m = m_{\text{св}} - \rho_{\text{пл}} V_{\text{св}} = m_{\text{св}} \left(1 - \frac{\rho_{\text{пл}}}{\rho_{\text{св}}}\right) = 7 \left(1 - \frac{2{,}4}{11{,}3}\right) \approx 5{,}51 \text{ г},$$

а допуск $(\rho_0 - \rho_{\text{пл}}) V_0 = 0{,}2 \cdot 27 = 5{,}4$ г. $5{,}51 > 5{,}4$ — не проходит. Этот способ хорош тем, что сравниваются малые числа и не теряется точность при вычитании близких масс.



Прибавка массы от свинца и разрешённая прибавка.

Обратите внимание. Разница всего 0,11 г при массе 70 г, поэтому округлять промежуточные числа грубо нельзя: с $V_{\text{св}} \approx 0{,}6$ см^3 вышло бы $m \approx 70{,}36$ г — вывод тот же, но с $V_{\text{св}} \approx 0{,}7$ см^3 получилось бы 70,12 г и неверный вывод.

Ответ:

$$m = \rho_{\text{пл}} a^3 + m_{\text{св}} \left(1 - \frac{\rho_{\text{пл}}}{\rho_{\text{св}}}\right) \approx 70{,}31 \text{ г} > m_0 = \rho_0 a^3 = 70{,}2 \text{ г}$$

— пронести кубик не удастся.

Проверка. Размерность: г/см^3 · см^3 = г. Средняя плотность кубика $m/V_0 \approx 2{,}604$ г/см^3 $> 2{,}6$ г/см^3 — тот же вывод. Предел: если бы плотность вставки равнялась плотности пластика, прибавки бы не было, $\Delta m = 0$.

Ответ. Не сможет: масса кубика $\approx 70{,}3$ г больше допустимых 70,2 г.