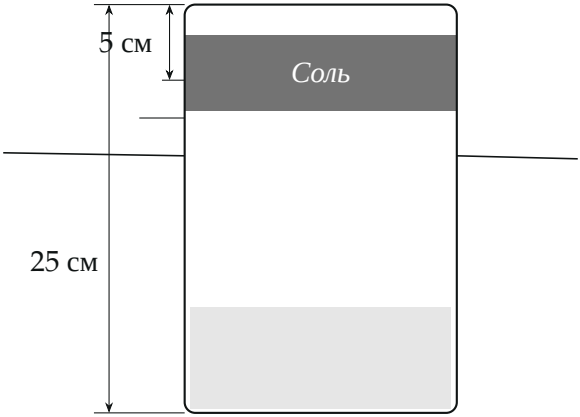
# Банка с солью от Робинзона

**Задача 4.** [Курчатов 2013/14, 7 класс, задача 4] Приятель Робинзона Крузо с соседнего острова попросил прислать ему морской почтой мешок соли. Так как мешок в дороге могут заклевать птицы, Робинзон решил отправить посылку в стеклянной цилиндрической банке. Чтобы сосед догадался о том, что в банке соль, Крузо наклеил ленточку шириной $d = 5$ см на верхнюю часть. Высота всей банки $L = 25$ см, а площадь основания — $S = 100$ см$^2$. Какой объем $V_c$ соли сможет переправить по воде Крузо, если её плотность $\rho = 2100$ кг/м$^3$, масса банки с крышкой $M = 0{,}2$ кг, а ленточка с надписью всегда должна оставаться над поверхностью воды? Плотность воды в океане в районе острова Робинзона $\rho_в \approx 1{,}027$ г/см$^3$.

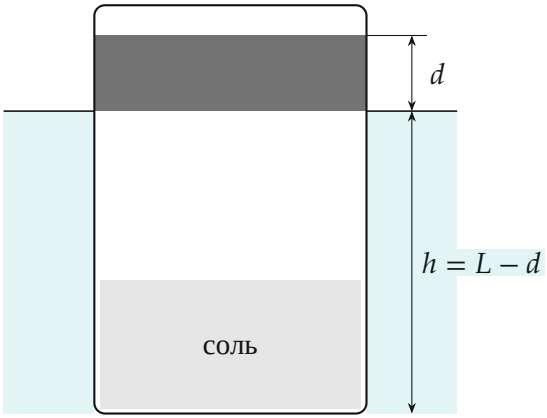



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на условие плавания. Банка с солью плавает, значит, сила Архимеда уравновешивает её вес. Чем больше соли, тем глубже сидит банка. Предельный случай — вода дошла до нижнего края ленточки: под водой часть банки высотой $L - d$. Из равновесия в этом положении найдём наибольшую массу, а затем и объём соли.

**Обозначения.** $h = L - d$ — наибольшая допустимая глубина погружения; $m_c = \rho V_c$ — масса соли; $F_A$ — сила Архимеда. Ось $y$ — вертикально вверх. Объём стекла и толщину стенок не учитываем — банку считаем цилиндром сечения $S$, как в условии.

**1. Глубина погружения.** Ленточка занимает верхние $d$ банки и должна быть над водой целиком. Значит, погружено не больше

$$h = L - d = 25 - 5 = 20 \text{ см}.$$




*Предельное положение: уровень воды по нижнему краю ленточки, под водой — высота $h = L - d$.*

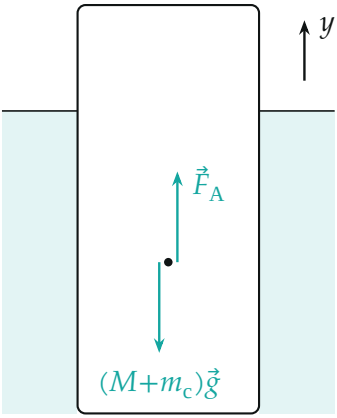
**2. Условие плавания.** Второй закон Ньютона для банки с солью (она покоится) в проекции на ось $y$:

$$F_\text{A} - (M + m_\text{c})g = 0.$$

Закон Архимеда: выталкивающая сила равна весу воды в объёме погружённой части, $F_\text{A} = \rho_\text{в} g S h$. Получаем

$$\rho_\text{в} S(L - d) = M + \rho V_c.$$

Чем больше соли, тем больше нужна $F_\text{A}$, тем глубже банка; значит, предельной глубине соответствует наибольший объём соли.



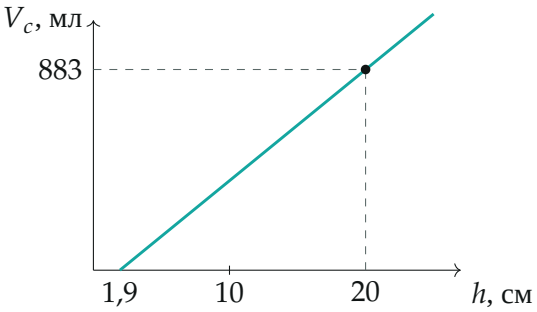

*Силы, действующие на банку с солью: сила тяжести и сила Архимеда.*

**3. Объём соли.**

$$V_c = \frac{\rho_в S(L-d) - M}{\rho} = \frac{1027 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}20 - 0{,}2}{2100}\ \text{м}^3,$$

$$V_c = \frac{2{,}054 - 0{,}2}{2100}\ \text{м}^3 \approx 8{,}83 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^3 \approx 883\ \text{мл}.$$

**4. Влезет ли соль.** Объём банки $SL = 2500$ см$^3$, соль займёт слой высотой $V_c/S \approx 8{,}8$ см — помещается с запасом (на рисунке к пункту 1 слой соли нарисован в масштабе).




*Сколько соли выдерживает банка при глубине погружения $h$: $V_c = (\rho_в Sh - M)/\rho$. Пустая банка сидит на 1,9 см; допустимо $h \le 20$ см.*

**Обратите внимание.** Плотность соли нужна, только чтобы перевести массу в объём: вода выталкивает банку целиком, а не соль, поэтому в закон Архимеда входит объём погружённой части банки $S(L-d)$, а не объём соли.

**Ответ:**

$$V_c = \frac{\rho_в S(L-d) - M}{\rho} \approx 883 \text{ мл}.$$

**Проверка.** Размерность: $\dfrac{\text{кг/м}^3 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м} - \text{кг}}{\text{кг/м}^3} = \text{м}^3$. Знак: числитель положителен (2,05 кг $>$ 0,2 кг) — пустая банка плавает, сидя всего на $M/(\rho_в S) \approx 1{,}9$ см. Второй способ: масса соли $\rho V_c \approx 1{,}854$ кг, вместе с банкой 2,054 кг $= \rho_в S(L-d)$ — сходится.

**Ответ.** $V_c = \dfrac{\rho_в S(L-d) - M}{\rho} \approx 883$ мл.