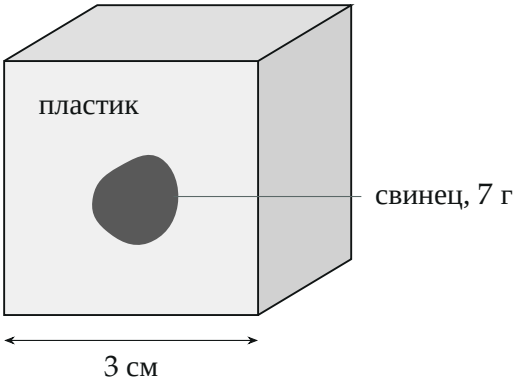
Шулер с кубиком-обманкой

Задача 1. [Курчатов 2013/14, 8 класс, задача 1] Шулер хочет пронести в казино игральный кубик, состоящий из пластика в форме куба с ребром 3 см, в который вплавлена свинцовая вставка неправильной формы массой 7 г. Сможет ли он это сделать, если для этого кубик должен весить не больше, чем кубик таких же габаритов плотностью $\rho_0 = 2{,}6$ г/см^3. Плотность свинца равна $\rho_{св} = 11{,}3$ г/см^3, плотность пластика $\rho_{пл} = 2{,}4$ г/см^3.



Поясняющий рисунок: пластиковый кубик со свинцовой вставкой.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на плотность и массу составного тела. Внешне кубик тот же, что и «честный» кубик плотностью ρ_0, поэтому сравниваем массы двух кубиков одного объёма. Свинцовая вставка вытесняет часть пластика: её объём находим из её массы и плотности свинца, остальное — пластик.

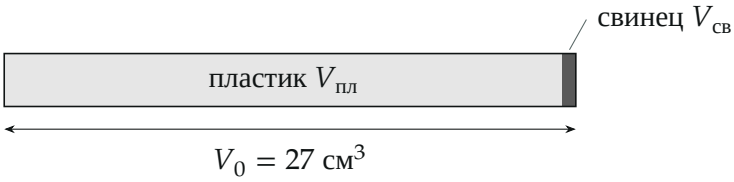
Обозначения. $a = 3$ см — ребро; V_0 — объём кубика; $m_{св} = 7$ г, $V_{св}$ — масса и объём вставки; $V_{пл}$, $m_{пл}$ — объём и масса пластика; M — масса кубика шулера; M_0 — масса «честного» кубика.

1. Объёмы. Объём куба $V_0 = a^3 = 27$ см^3. По определению плотности $\rho = m/V$ объём свинца

$$V_{св} = \frac{m_{св}}{\rho_{св}} = \frac{7\text{ г}}{11{,}3\text{ г/см}^3} \approx 0{,}619\text{ см}^3.$$

Пластик занимает остальное (рисунок 2):

$$V_{\text{пл}} = V_0 - V_{\text{св}} \approx 27 - 0{,}619 = 26{,}381 \text{ см}^3.$$



Объём кубика: почти весь — пластик, свинец занимает около $0{,}6$ *см*^{3} *(в масштабе).*

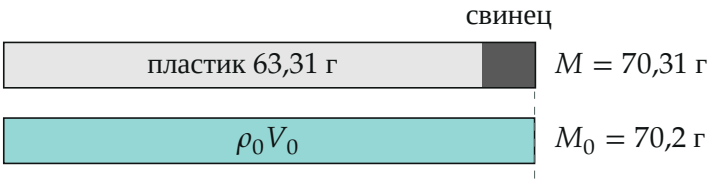
2. Масса кубика шулера. Масса пластика $m_{\text{пл}} = \rho_{\text{пл}} V_{\text{пл}}$, полная масса — сумма масс частей:

$$M = \rho_{\text{пл}} \left(V_0 - \frac{m_{\text{св}}}{\rho_{\text{св}}} \right) + m_{\text{св}} \approx 2{,}4 \cdot 26{,}381 + 7 = 63{,}31 + 7 = 70{,}31 \text{ г}.$$

3. Масса «честного» кубика.

$$M_0 = \rho_0 V_0 = 2{,}6 \cdot 27 = 70{,}2 \text{ г}.$$

4. Сравнение. $M \approx 70{,}31$ г $> M_0 = 70{,}2$ г — кубик тяжелее допустимого на $0{,}11$ г (рисунок 3). Пронести не получится.



Масса кубика шулера (вверху) и допустимая масса (внизу). Разница $0{,}11$ *г мала, поэтому считаем с запасом знаков.*

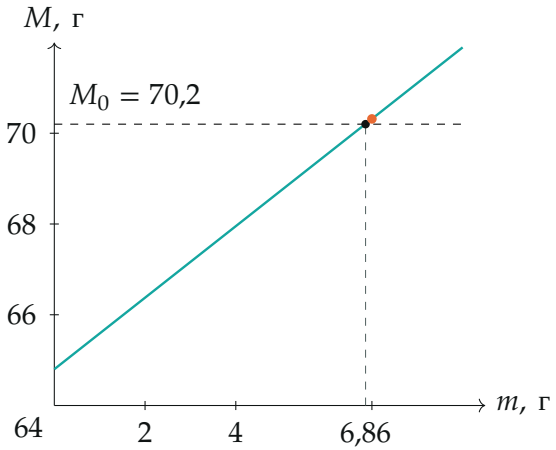
5. Второй способ: предельная масса вставки. Найдём, какой массы m свинец ещё допустим. Масса кубика как функция m:

$$M(m) = \rho_{\text{пл}} V_0 + m\left(1 - \frac{\rho_{\text{пл}}}{\rho_{\text{св}}}\right) = 64{,}8 + 0{,}788\, m \text{ (г)}.$$

Условие $M(m) \le \rho_0 V_0$:

$$m \le \frac{(\rho_0 - \rho_{\text{пл}})V_0}{1 - \rho_{\text{пл}}/\rho_{\text{св}}} = \frac{0{,}2 \cdot 27}{0{,}788} \approx 6{,}86 \text{ г}.$$

Вставка в 7 г больше предельной 6,86 г (рисунок 4) — вывод тот же.



Масса кубика в зависимости от массы свинцовой вставки (ось M начинается с 64 г). Выше штриховой прямой — не пропустят; кубик шулера — морковная точка.

Обратите внимание. Разница масс — десятая доля грамма, около 0,16 %. Если округлять объём свинца до 0,6 см^3 или массу пластика до целых граммов, можно получить неверный вывод. Считать надо с тремя-четырьмя значащими цифрами.

Ответ: $M = \rho_{\text{пл}}\left(V_0 - \dfrac{m_{\text{св}}}{\rho_{\text{св}}}\right) + m_{\text{св}} \approx 70{,}31 \text{ г} > \rho_0 V_0 = 70{,}2 \text{ г}$ — не сможет.

Проверка. Размерность: г/см^3 · см^3 = г. Предел: без свинца ($m = 0$) кубик весит 64,8 г — меньше 70,2 г, пластик легче нормы; свинец добавляет к массе не m, а $0{,}788\,m$, потому что вытесняет пластик.

Ответ. Не сможет: кубик весит около 70,31 г, а допустимо 70,2 г.