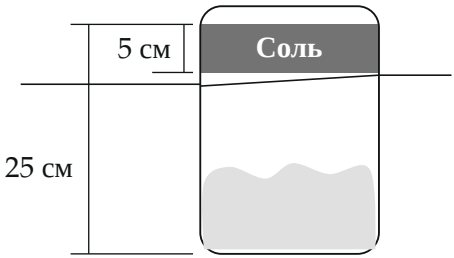
Банка с солью от Робинзона

Задача 2. [Курчатов 2013/14, 8 класс, задача 2] Приятель Робинзона Крузо с соседнего острова попросил прислать ему морской почтой мешок соли. Так как мешок в дороге могут заклевать птицы, Робинзон решил отправить посылку в стеклянной цилиндрической банке. Чтобы сосед догадался о том, что в банке соль, Крузо наклеил ленточку шириной $d = 5$ см на верхнюю часть. Высота всей банки $L = 25$ см, а площадь основания — $S = 100$ см^2. Какой объём V_c соли сможет переправить по воде Крузо, если её плотность $\rho = 2100$ кг/м^3, масса банки с крышкой $M = 0{,}2$ кг, а ленточка с надписью всегда должна оставаться над поверхностью воды? Плотность воды в океане в районе острова Робинзона $\rho_в \approx 1{,}027$ г/см^3.

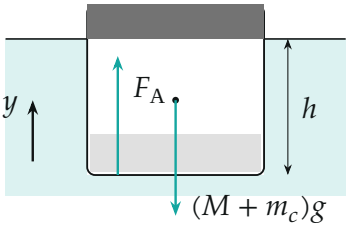


▲ **Решение. Что происходит.** Задача на условие плавания тел (закон Архимеда). Банка плавает: её вес вместе с солью уравновешен выталкивающей силой. Чем больше соли, тем глубже банка садится в воду. Ленточка должна быть над водой, значит, погружаться можно самое большее на $L - d$ — это и задаёт предельный вес, а с ним и объём соли.

Обозначения. h — глубина погружения банки; $V_{погр} = Sh$ — объём погружённой части; $m_c = \rho V_c$ — масса соли; F_A — сила Архимеда. Толщиной стекла пренебрегаем: банка снаружи — цилиндр площадью основания S; банка плавает вертикально, дном вниз (соль на дне).

1. Силы. На банку с солью действуют (рисунок 2): сила тяжести $(M + m_c)g$ — вниз; сила Архимеда $F_A = \rho_в g Sh$ — вверх (вес воды в объёме погружённой части). Второй закон Ньютона для покоящейся банки в проекции на вертикальную ось y вверх:

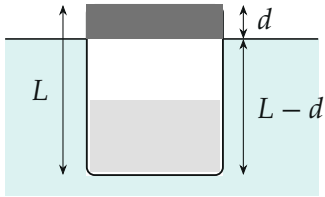
$$\rho_в g Sh - (M + \rho V_c)g = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_в Sh = M + \rho V_c.$$



Силы, действующие на банку с солью при погружении на h.

2. Предельное погружение. Ленточка ширины d наверху банки остаётся над водой, пока $h \le L - d$ (рисунок 3). Больше соли — больше h, поэтому наибольший объём соли соответствует $h = L - d$:

$$\rho_в S(L-d) = M + \rho V_c \quad \Rightarrow \quad V_c = \frac{\rho_в S(L-d) - M}{\rho}.$$



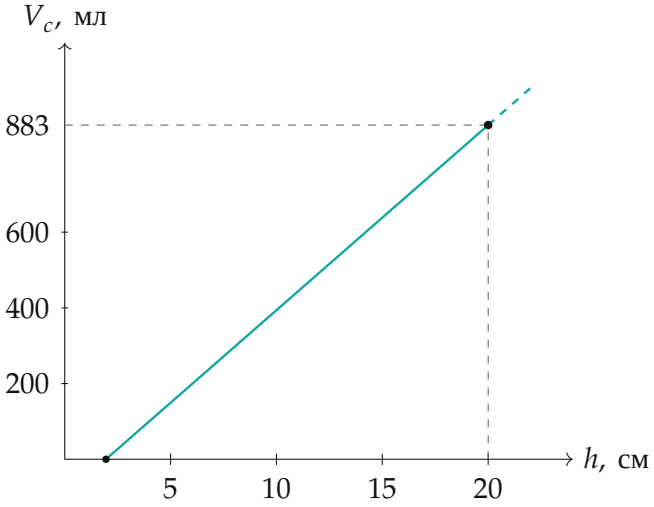
Предельное положение: нижний край ленточки на уровне воды.

3. Числа. В граммах и сантиметрах: $S(L-d) = 100 \cdot 20 = 2000$ см^3, $\rho_в S(L-d) = 1{,}027 \cdot 2000 = 2054$ г, $M = 200$ г, $\rho = 2{,}1$ г/см^3:

$$V_c = \frac{2054 - 200}{2{,}1}\ \text{см}^3 = \frac{1854}{2{,}1}\ \text{см}^3 \approx 883\ \text{см}^3 = 883\ \text{мл}.$$

Масса соли $m_c = \rho V_c \approx 1854$ г.

4. Соль от глубины погружения. Из шага 1 при любом h: $V_c(h) = \dfrac{\rho_в S h - M}{\rho} = 48{,}9\,h - 95{,}2$ (в мл, h в см). Пустая банка ($V_c = 0$) сидит на $h_0 = M/(\rho_в S) \approx 1{,}95$ см; предел $h = 20$ см даёт 883 мл (рисунок 4).



Объём соли, при котором банка погружается на глубину h. Правее $h = 20$ см (штрих) ленточка уходит под воду.

Обратите внимание. Под водой должна быть не вся банка до ленточки «по высоте соли», а погружённая часть *банки* — соль может занимать лишь часть объёма банки. Проверим, что соль влезает: объём банки $SL = 2500$ см$^3 > 883$ см^3 — влезает.

Ответ: $V_c = \dfrac{\rho_в S(L-d) - M}{\rho} \approx 883$ мл.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{г/см}^3 \cdot \text{см}^2 \cdot \text{см} - \text{г}}{\text{г/см}^3} = \text{см}^3$. Предел: при $M \to \rho_в S(L-d)$ даже пустая банка садится до ленточки, и $V_c \to 0$. Второй способ — через массы: допустимая общая масса равна массе вытесненной воды 2054 г, на соль остаётся 1854 г, это $1854/2{,}1 \approx 883$ см^3.

Ответ. $V_c \approx 883$ мл.