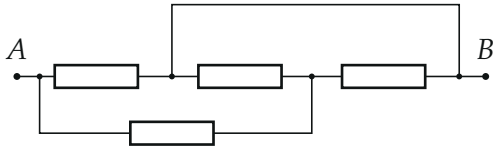
Цепь из четырёх резисторов

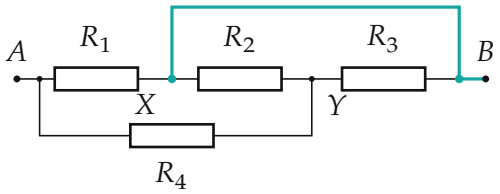
Задача 2. [Курчатов 2013/14, 9 класс, задача 2] Из четырёх одинаковых резисторов, сопротивление каждого из которых $R = 100$ Ом, собрана цепь, показанная на рисунке. Найдите мощность, которая будет выделяться в цепи, если на концы A и B подать напряжение $U = 120$ В.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на расчёт цепи с последовательным и параллельным соединением. Главное — увидеть, что верхний провод соединяет узел между первым и вторым резисторами прямо с концом B: у этих точек одинаковый потенциал, их можно считать одним узлом. После этого схема перерисовывается в простую, и мощность находим по закону Джоуля — Ленца $P = U^2/R_{\text{ц}}$.

Обозначения. Резисторы: R_1 — левый в верхнем ряду, R_2 — средний, R_3 — правый, R_4 — нижний. Узлы: X — между R_1 и R_2, Y — между R_2 и R_3 (сюда же приходит нижняя ветвь с R_4). $R_{\text{ц}}$ — сопротивление всей цепи, I — полный ток.

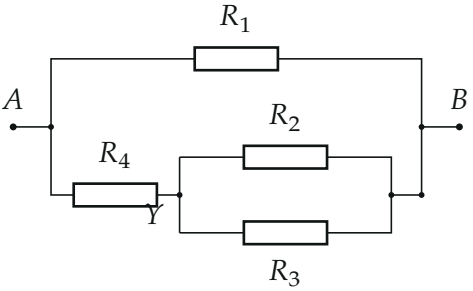
1. Узлы с одинаковым потенциалом. Провод без сопротивления не создаёт разности потенциалов, поэтому $\varphi_X = \varphi_B$: точки X и B — один узел. Нижний провод слева идёт от точки, соединённой с A проводом, — значит, R_4 включён между A и Y (рисунок 2).



Бирюзовый провод соединяет узел X с концом B: у них один потенциал.

2. Перерисовываем схему. Ставим X и B в одну точку (рисунок 3):

- R_1 включён прямо между A и B;
- R_2 и R_3 оба включены между Y и B — параллельно;
- R_4 стоит между A и Y, последовательно с парой $R_2 \parallel R_3$.



Эквивалентная схема: R_1 параллельно цепочке «R_4 + ($R_2 \parallel R_3$)».

3. Сопротивление цепи. Правило параллельного соединения для одинаковых $R_2 = R_3 = R$: $R_{23} = \dfrac{R}{2}$. Правило последовательного соединения для нижней ветви: $R_н = R_4 + R_{23} = \dfrac{3R}{2}$. Ветви R_1 и $R_н$ параллельны:

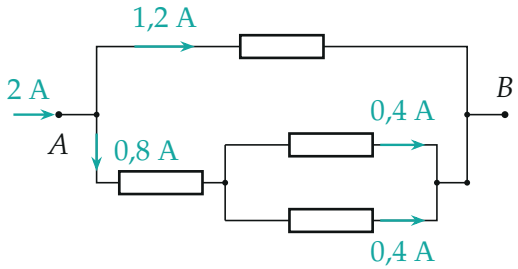
$$R_ц = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{3}{2}R}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{3R} + \frac{2}{3R}\right)^{-1} = \frac{3R}{5} = \frac{3}{5} \cdot 100\ \text{Ом} = 60\ \text{Ом}.$$

4. Мощность. Закон Джоуля — Ленца для всей цепи при известном напряжении:

$$P = \frac{U^2}{R_ц} = \frac{5U^2}{3R} = \frac{(120\ \text{В})^2}{60\ \text{Ом}} = 240\ \text{Вт}.$$

Проверка: токи и мощность по резисторам. На R_1 всё напряжение U: $I_1 = \dfrac{120}{100} = 1{,}2$ А. Нижняя ветвь: $I_4 = \dfrac{U}{\frac{3}{2}R} = \dfrac{120}{150} = 0{,}8$ А, он делится поровну: $I_2 = I_3 = 0{,}4$ А (рисунок 4). Полный ток $I = 1{,}2 + 0{,}8 = 2$ А, и $P = UI = 240$ Вт. По резисторам $P = I^2R$:

$$P = 1{,}2^2 \cdot 100 + 0{,}8^2 \cdot 100 + 2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 100 = 144 + 64 + 16 + 16 = 240\ \text{Вт}.$$



Токи в ветвях при $U = 120$ В.

Обратите внимание. Ловушка — считать, что все четыре резистора участвуют одинаково или что R_2, R_3 стоят последовательно, как нарисованы в ряд. Верхний провод «закорачивает» их правые концы на B, и они оказываются параллельными.

Ответ: $P = \dfrac{U^2}{R_{\text{ц}}} = \dfrac{5U^2}{3R} = 240$ Вт.

Размерность: $\text{В}^2/\text{Ом} = \text{В} \cdot \text{А} = \text{Вт}$. Предел: если убрать нижнюю ветвь, останется один R_1 и $P = U^2/R = 144$ Вт — меньше, как и должно быть: добавленная параллельная ветвь снижает сопротивление и увеличивает мощность.

Ответ. $P = 240$ Вт.