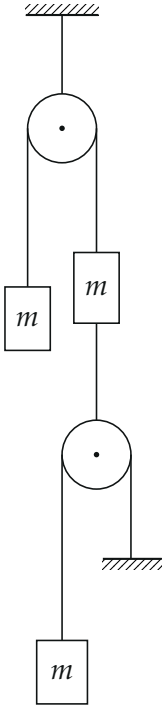
Три груза с блоками

Задача 3. [Курчатов 2013/14, 9 класс, задача 3] Три одинаковых груза массой m соединены с помощью идеальных нитей и двух идеальных блоков, как показано на рисунке. Найдите величину и направление ускорения нижнего груза.



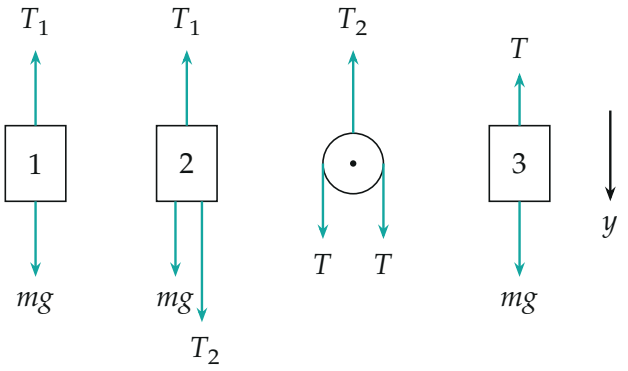
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на второй закон Ньютона для связанных тел. Неизвестных пять: ускорения грузов и натяжения нитей. Ускорения связаны нерастяжимостью нитей (кинематика), натяжения — невесомостью блоков. Подвижный нижний блок висит на среднем грузе; через него перекинута нить, один конец которой держит нижний груз, а другой привязан к полу. Такой блок даёт выигрыш в силе и проигрыш в пути: нижний груз движется вдвое быстрее блока.

Обозначения. Грузы: 1 — левый, 2 — средний (правый наверху), 3 — нижний. Ось y направим вниз. T_1 — натяжение верхней нити (через

неподвижный блок), T_2 — нити между грузом 2 и осью нижнего блока, T — нити через нижний блок. a_1, a_2, a_3 — проекции ускорений грузов на ось y.

1. Натяжения: невесомые блоки. Идеальная нить через идеальный блок имеет одно натяжение по обе стороны, поэтому у верхней нити всюду T_1, у нижней — всюду T. Второй закон Ньютона для невесомого нижнего блока: сумма сил равна нулю (масса ноль). Вверх его тянет T_2, вниз — два куска нити по T (рисунок 2):

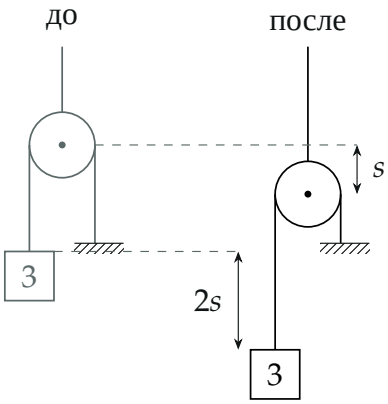
$$T_2 - 2T = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2T.$$



Силы, действующие на каждый груз и на нижний блок. Ось y направлена вниз.

2. Кинематическая связь. Верхняя нить нерастяжима: насколько опустился груз 2, настолько поднялся груз 1, поэтому $a_1 = -a_2$. Нижний блок привязан к грузу 2 и движется вместе с ним. Пусть блок опустился на s (рисунок 3). Кусок нити от блока до пола укоротился на s, кусок от блока до груза 3 при неподвижном грузе тоже укоротился бы на s; нить нерастяжима, поэтому груз 3 опускается на $2s$:

$$a_3 = 2a_2.$$



Нижний блок опустился на s — груз 3 опустился на $2s$. Ось y вниз.

3. Второй закон Ньютона для грузов в проекции на ось y (вниз). Груз 1: вниз mg, вверх T_1; груз 2: вниз mg и T_2, вверх T_1; груз 3: вниз mg, вверх T:

$$\begin{cases} ma_1 = mg - T_1, \\ ma_2 = mg + T_2 - T_1, \\ ma_3 = mg - T. \end{cases}$$

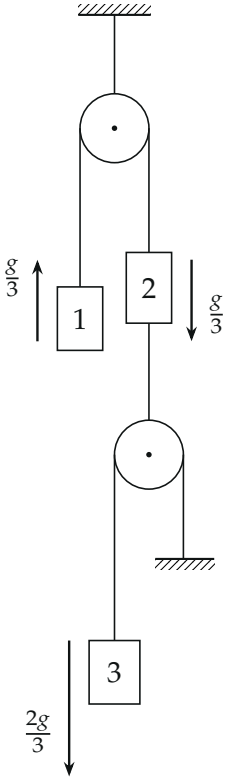
Пусть $a \equiv a_2$, тогда $a_1 = -a$, $a_3 = 2a$, $T_2 = 2T$:

$$\begin{cases} -ma = mg - T_1, \\ ma = mg + 2T - T_1, \\ 2ma = mg - T. \end{cases}$$

4. Решаем. Вычтем первое уравнение из второго: $2ma = 2T$, то есть $T = ma$. Подставим в третье: $2ma = mg - ma$, откуда

$$a = \frac{g}{3}, \qquad a_3 = 2a = \frac{2g}{3}, \qquad T = \frac{mg}{3}, \qquad T_1 = mg + ma = \frac{4mg}{3}.$$

Проекция $a_3 > 0$ — нижний груз ускоряется *вниз*. Груз 2 тоже идёт вниз с $g/3$, груз 1 — вверх с $g/3$ (рисунок 4).



Ускорения грузов.

Обратите внимание. Нельзя приравнивать ускорения всех грузов: нижний груз висит на подвижном блоке и движется вдвое быстрее среднего. Без связи $a_3 = 2a_2$ система уравнений не замыкается.

Ответ: $a_3 = 2a = \dfrac{2g}{3}$, направлено вниз.

Проверка. Все натяжения положительны ($T = mg/3$, $T_1 = 4mg/3$) — нити натянуты, решение физично. Второй способ — энергия: при смещении груза 2 вниз на s груз 1 поднимается на s, груз 3 опускается на $2s$; потенциальная энергия убывает на $mg(s - s + 2s) = 2mgs$, кинетическая $\frac{m}{2}(v^2 + v^2 + 4v^2) = 3mv^2$. Из $3mv^2 = 2mgs$ имеем $v^2 = \frac{2}{3}gs = 2as$, то есть $a = g/3$ — совпадает.

Ответ. $a_3 = \dfrac{2g}{3}$, направлено вниз.