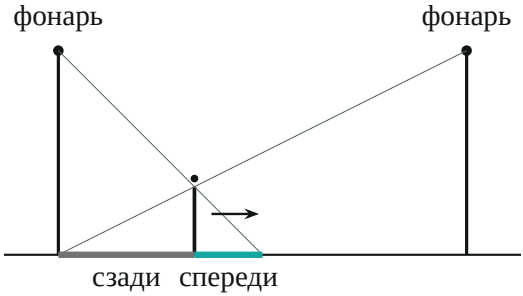
Тени от уличных фонарей

Задача 4. [Курчатов 2013/14, 9 класс, задача 4] Человек идёт ночью по улице, освещённой фонарями. В некоторый момент он обратил внимание на то, что тень, которую он отбрасывает перед собой, в два раза короче тени за его спиной. Пройдя 5 м он заметил, что ситуация изменилась: теперь тень за спиной в два раза короче тени перед ним. На каком расстоянии друг от друга стоят на этой улице фонарные столбы, если все они одинаковой высоты?



Поясняющий рисунок: человек между двумя фонарями (стрелка — куда он идёт) и две его тени.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на прямолинейное распространение света. Тень от фонаря ложится по другую сторону от человека: тень *перед* человеком даёт фонарь *за спиной*, тень за спиной — фонарь впереди. Из подобия треугольников длина тени пропорциональна расстоянию от человека до основания своего фонаря. Поэтому отношение теней — это отношение расстояний до двух соседних столбов. Считаем, что заметные тени дают два ближайших фонаря, между которыми человек идёт, и за 5 м он столб не миновал.

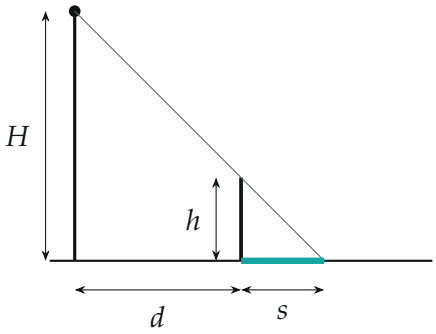
Обозначения. H — высота фонаря, h — рост человека, L — расстояние между столбами; x — расстояние от человека до столба за спиной, тогда до столба впереди $L - x$; $s_п$ и $s_з$ — длины теней перед человеком и за ним.

1. Длина тени. Свет от фонаря идёт по прямой; луч через макушку человека касается земли в конце тени (рисунок 2). Треугольник «фонарь

— основание столба — конец тени» подобен треугольнику «макушка — ноги — конец тени» (общий угол при конце тени, оба прямоугольные):

$$\frac{s}{h} = \frac{s+d}{H} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{h}{H-h}\,d,$$

где d — расстояние от человека до столба. Тень пропорциональна d с одним и тем же коэффициентом $k = \dfrac{h}{H-h}$ для всех фонарей — они одной высоты.



Тень от одного фонаря: подобные треугольники с общей вершиной в конце тени.

2. Первый момент. Тень спереди даёт столб сзади: $s_\text{п} = kx$; тень сзади даёт столб впереди: $s_\text{з} = k(L-x)$. По условию $s_\text{п} = \frac{1}{2}s_\text{з}$:

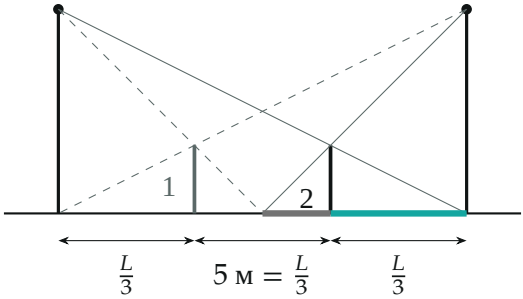
$$kx_1 = \tfrac{1}{2}k(L-x_1) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{L}{3}.$$

3. Второй момент. Теперь $s_\text{з} = \frac{1}{2}s_\text{п}$:

$$k(L-x_2) = \tfrac{1}{2}kx_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{2L}{3}.$$

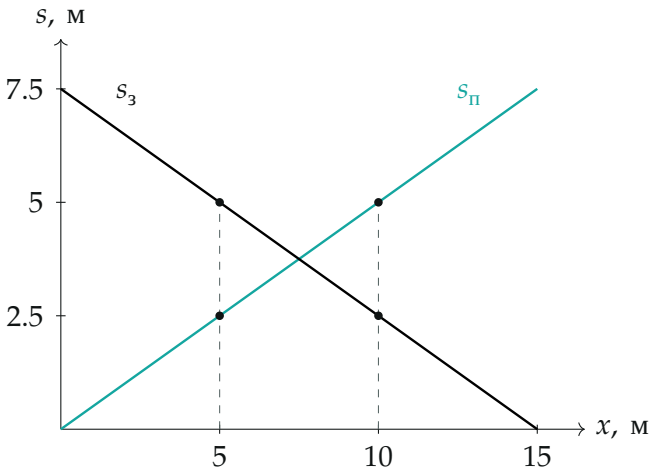
4. Пройденный путь. Между моментами человек прошёл (рисунок 3)

$$x_2 - x_1 = \frac{2L}{3} - \frac{L}{3} = \frac{L}{3} = 5\text{ м} \quad \Rightarrow \quad L = 3\cdot 5\text{ м} = 15\text{ м}.$$



Положения 1 (серый) и 2. Во втором положении тень спереди (бирюза) вдвое длиннее тени сзади (серая полоса). Штриховые лучи — для положения 1.

5. Как меняются тени по ходу. Пусть $L = 15$ м; для определённости $k = 0{,}5$ (фонарь $H = 3h$). Тогда $s_п = 0{,}5x$ растёт, $s_з = 0{,}5(15 - x)$ убывает (рисунок 4). При $x = 5$ м тени 2,5 и 5 м, при $x = 10$ м — 5 и 2,5 м: отношения 1 : 2 и 2 : 1, как в условии. Сам ответ от k не зависит: рост человека и высота фонаря сокращаются.



Длины теней спереди и сзади в зависимости от расстояния x до столба за спиной ($k = 0{,}5$). Точки — два момента из условия.

Обратите внимание. Мы считали, что за 5 м человек не прошёл мимо столба. Если бы прошёл, то от положения $x_1 = L/3$ до следующего

столба $\frac{2}{3}L$ и затем ещё $\frac{2}{3}L$: путь $\frac{4}{3}L = 5$ м и $L \approx 3{,}8$ м — для уличных фонарей нереально часто. Поэтому верен ответ с одним пролётом.

Ответ: $L = 3\,(x_2 - x_1) = 15$ м.

Проверка. Размерность — метры. Второй способ: точки, где тени относятся как $1:2$ и $2:1$, делят пролёт между столбами на три равные части — человек прошёл ровно среднюю треть, $L = 3 \cdot 5 = 15$ м.

Ответ. 15 м.