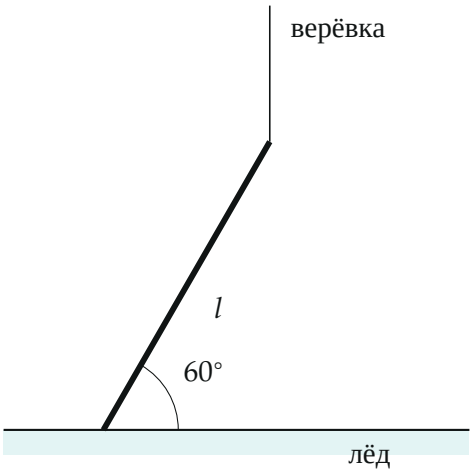
Доска падает на гладком льду

Задача 5. [Курчатов 2013/14, 9 класс, задача 5] На гладком льду лежит однородная доска длиной $l = 2$ м. К одному из концов доски привязали верёвку и стали медленно тянуть её вверх. Когда угол между доской и поверхностью льда стал равен 60°, вертикально натянутая верёвка оборвалась. На какое расстояние сместится при падении доски её нижний конец?



Поясняющий рисунок: доска в момент обрыва верёвки.

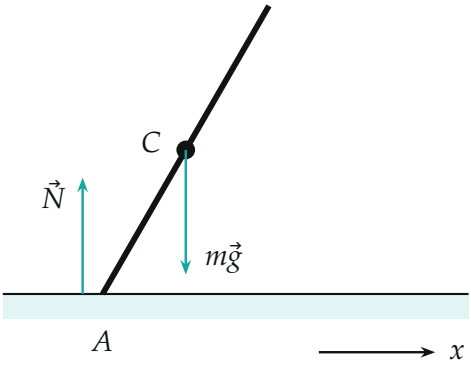
▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на теорему о движении центра масс. После обрыва на доску действуют только вертикальные силы: тяжесть и нормальная реакция льда; трения на гладком льду нет. Горизонтальных внешних сил нет, а в момент обрыва доска покоится (тянули медленно) — поэтому центр масс доски движется строго вертикально вниз. Нижний конец при этом скользит по льду, и его смещение находим из геометрии начального и конечного положений.

Обозначения. Ось x — горизонтально вдоль льда, в сторону от нижнего конца к проекции верхнего; начало — в начальном положении нижнего конца A. C — центр масс (середина доски), φ — угол доски со льдом, x_A, x_C — координаты нижнего конца и центра масс.

1. Силы после обрыва. На доску действуют (рисунок 2): сила тяжести $m\vec{g}$ в центре масс — вниз; нормальная реакция льда $\vec{N}$ в точке A —

перпендикулярно гладкой поверхности, вверх. Сила трения равна нулю (лёд гладкий). Верёвки больше нет. Проекция суммы внешних сил на ось x:

$$F_x = 0.$$



Силы, действующие на падающую доску: все вертикальны.

2. Центр масс движется по вертикали. Теорема о движении центра масс в проекции на ось x: $ma_{Cx} = F_x = 0$. Начальная скорость центра масс равна нулю (доску поднимали медленно), значит, $v_{Cx} = 0$ всё время падения и x_C не меняется:

$$x_C = \text{const}.$$

3. Начальное положение. При $\varphi = 60°$ центр масс находится над точкой, удалённой от A по горизонтали на (рисунок 3)

$$x_C = \frac{l}{2}\cos 60° = \frac{l}{4} = 0{,}5 \text{ м}.$$

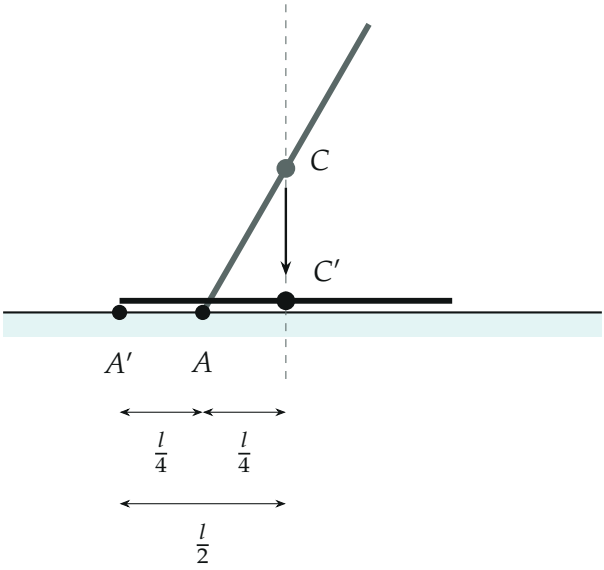
4. Конечное положение. Доска легла на лёд, $\varphi = 0$. Центр масс — над той же точкой $x_C = l/4$, а нижний конец — на расстоянии $l/2$ от него, по ту сторону, где он был:

$$x'_A = x_C - \frac{l}{2} = \frac{l}{4} - \frac{l}{2} = -\frac{l}{4}.$$

5. Смещение нижнего конца.

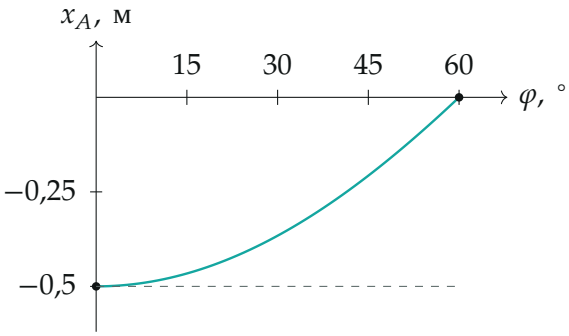
$$\Delta x_A = x'_A - 0 = -\frac{l}{4} = -0{,}5 \text{ м}.$$

Минус: нижний конец отъехал на 0,5 м в сторону *от* центра масс, наружу.



Начальное (серое) и конечное (чёрное) положения доски. Центр масс опускается по вертикальной штриховой прямой, нижний конец уходит из A в A'.

6. Как едет нижний конец по ходу падения. При угле φ координата нижнего конца $x_A = x_C - \frac{l}{2}\cos\varphi = 0{,}5 - \cos\varphi$ (в метрах). Конец движется всё время в одну сторону, от 0 при 60° до −0,5 м при 0° (рисунок 4). Отрыва от льда не учитываем: в стандартной постановке конец доски скользит по льду всё падение.



Координата нижнего конца в зависимости от угла доски со льдом. Падение идёт справа налево: от 60° к 0°.

Обратите внимание. Смещение нижнего конца — это не $l - l\cos 60° = 1$ м (так было бы, если бы неподвижным оставался верхний конец) и не $\frac{l}{2}$. Неподвижна горизонтальная координата *центра масс*, потому что лёд гладкий.

Ответ: $|\Delta x_A| = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos 60° = \frac{l}{4} = 0{,}5$ м, нижний конец отъезжает от точки под центром масс.

Проверка. Размерность — метры. Предел: если бы доска стояла вертикально ($\varphi = 90°$), конец сместился бы на $\frac{l}{2}$; если бы почти лежала ($\varphi \to 0$) — на ноль. Общая формула $\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$ даёт оба предела, при 60° — $\frac{l}{4}$.

Ответ. На 0,5 м (нижний конец отъезжает в сторону от центра масс).