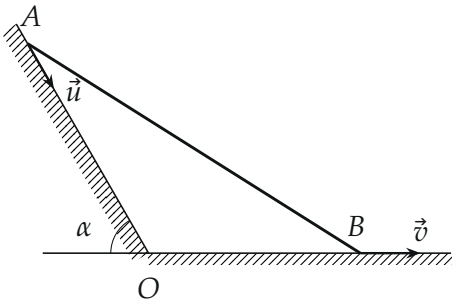
Стержень в двугранном угле

Задача 1. [Курчатов 2014/15, 10 класс, задача 1] На двугранном угле находится тонкий стержень, нижний конец которого перемещают со скоростью v вдоль горизонтали (см. рис.). Найдите скорость u верхнего конца стержня в момент, когда $OA : OB = 2 : 1$. Угол $\alpha = 60°$. Концы стержня не отрываются от поверхностей двугранного угла.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на кинематическую связь: стержень нерастяжимый, поэтому скорости его концов связаны. Главная идея — проекции скоростей двух точек твёрдого стержня на направление стержня одинаковы (иначе расстояние между ними менялось бы). Направления обеих скоростей известны: конец B скользит по горизонтали, конец A — по наклонной грани к точке O.

Обозначения. $OA = 2b$, $OB = b$; φ — угол между стержнем и горизонталью (между $\vec{v}$ и BA), ψ — угол между стержнем и наклонной гранью (между $\vec{u}$ и AB). Угол двугранного угла внутри, $\angle AOB = 180° - \alpha = 120°$.

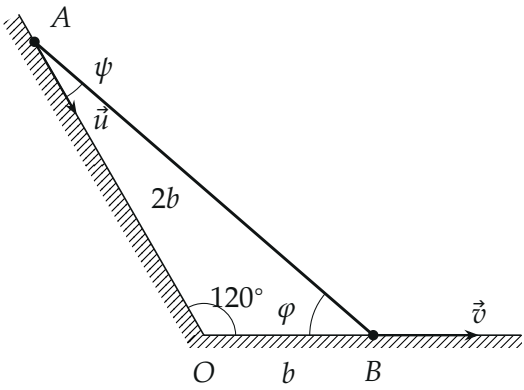
1. Геометрия треугольника AOB**.** Теорема косинусов для треугольника AOB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\,OA \cdot OB \cos 120° = 7b^2,$$

$$AB = \sqrt{7}\,b.$$

Проекции на горизонталь: $AB\cos\varphi = OB + OA\cos\alpha = b + b = 2b$, откуда $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$. Угол ψ — в вершине A; теорема косинусов: $OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2\,OA\cdot AB\cos\psi$:

$$\cos\psi = \frac{4b^2 + 7b^2 - b^2}{2\cdot 2b\cdot\sqrt{7}\,b} = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

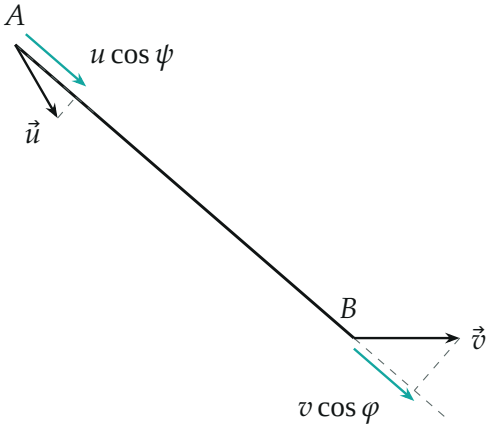


Положение при $OA : OB = 2 : 1$: скорости концов и углы φ, ψ между ними и стержнем (построено в масштабе).

2. Условие нерастяжимости. За малое время Δt длина стержня не меняется. Изменение расстояния AB равно разности проекций скоростей концов на направление стержня, умноженной на Δt; значит, проекции равны (рисунок 3):

$$v\cos\varphi = u\cos\psi.$$

Обе проекции направлены вдоль $\overrightarrow{AB}$: точка B уходит от A, а точка A догоняет B — стержень движется как целое.



Проекции скоростей концов на стержень (бирюзовые, сдвинуты вбок от стержня) равны: $v\cos\varphi = u\cos\psi$.

3. Скорость верхнего конца.

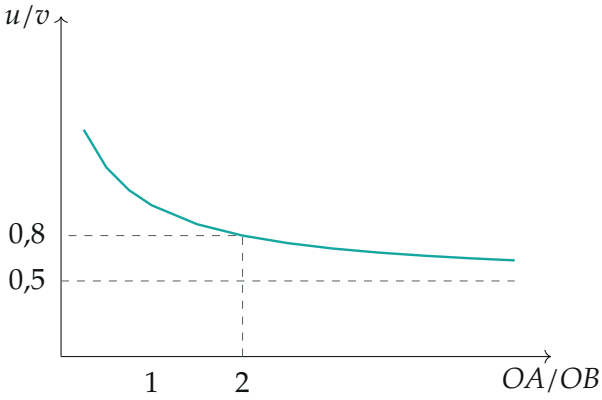
$$u = v\,\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = v\cdot\frac{2/\sqrt{7}}{5/(2\sqrt{7})} = \frac{4}{5}\,v.$$

4. Второй способ — через длину стержня. Пусть $OA = x$, $OB = y$. Длина стержня постоянна: $x^2 + y^2 + xy = \text{const}$ (теорема косинусов при $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$). За малое время Δt: $\Delta y = v\Delta t$ (нижний конец удаляется от O), $\Delta x = -u\Delta t$ (верхний приближается к O). Изменение левой части с точностью до малых первого порядка:

$$2x\Delta x + 2y\Delta y + x\Delta y + y\Delta x = 0 \quad\Rightarrow\quad -u(2x+y) + v(2y+x) = 0,$$

$$u = \frac{2y+x}{2x+y}\,v = \frac{2b+2b}{4b+b}\,v = \frac{4}{5}\,v.$$

Совпадает с пунктом 3. Как меняется u при движении — рисунок 4.



Отношение $u/v = \dfrac{2+k}{2k+1}$ *при* $k = OA/OB$ *(по точкам): при* $k = 2$ *получаем* 0,8*; при длинном* OA *стремится к* 0,5.

Обратите внимание. Внутренний угол двугранного угла — 120°, а не 60°: α на рисунке — угол между гранью и продолжением горизонтальной грани.

Ответ: $u = v\dfrac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \dfrac{OB + OA\cos\alpha}{OA + OB\cos\alpha}\,v = \dfrac{4}{5}\,v.$

Проверка. Размерность верна, ответ — безразмерный множитель при v. Предел $OA = OB$: по симметрии концы движутся с одинаковой скоростью, формула даёт $u = v$ — верно. Смысл: ближе к вершине угла находится нижний конец, поэтому верхний конец движется медленнее.

Ответ. $u = \dfrac{4}{5}\,v.$