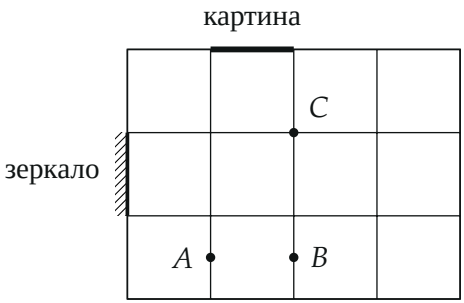
# Картина и зеркало в комнате

**Задача 2.** [Курчатов 2014/15, 10 класс, задача 2] В прямоугольной комнате на одной из стен висит картина, а на другой — плоское зеркало (см. рис.). Из какой точки комнаты ($A$, $B$ или $C$) можно полностью увидеть отражение картины в зеркале?



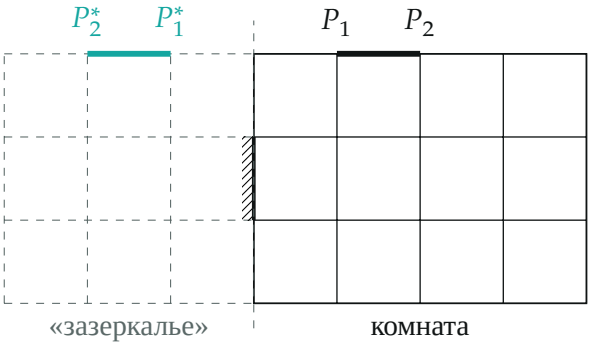

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение изображения в плоском зеркале. Отражение картины — её мнимое изображение, симметричное картине относительно плоскости зеркала. Глаз видит изображение точки, если прямая «глаз — изображение» проходит через само зеркало (а не через стену рядом с ним). Картина видна целиком, если так видны оба её края: изображения промежуточных точек лежат между изображениями краёв, и прямые к ним попадают на зеркало между прямыми к краям.

**Обозначения.** Сторона клетки — единица длины; начало координат — в левом нижнем углу комнаты, ось $x$ вправо, ось $y$ вверх. Зеркало — отрезок стены $x = 0$ от $y = 1$ до $y = 2$. Края картины: $P_1(1;\,3)$ и $P_2(2;\,3)$. Точки: $A(1;\,0{,}5)$, $B(2;\,0{,}5)$, $C(2;\,2)$.

**1. Изображения краёв картины.** Плоское зеркало даёт изображение, симметричное предмету относительно плоскости зеркала (закон отражения: угол падения равен углу отражения). Продолжим плоскость зеркала — прямую $x = 0$. Тогда

$$P_1^*(-1;\,3), \qquad P_2^*(-2;\,3).$$

Изображение картины — отрезок $P_1^*P_2^*$ «за стеной», в зазеркальной комнате (рисунок 2).




*Изображение картины в плоскости зеркала: края $P_1$, $P_2$ переходят в $P_1^*$, $P_2^*$, симметричные относительно прямой $x = 0$.*

**2. Откуда виден каждый край.** Изображение $P^*$ видно из точки комнаты, если эта точка лежит в «окне» — между прямыми, проведёнными из $P^*$ через концы зеркала $(0;\,1)$ и $(0;\,2)$.

Для $P_1^*(-1;\,3)$: прямая через $(0;\,2)$ — $y = 2 - x$, через $(0;\,1)$ — $y = 1 - 2x$. Область видимости:

$$1 - 2x \le y \le 2 - x.$$

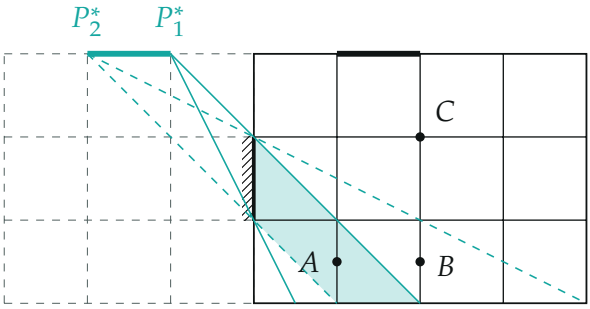
Для $P_2^*(-2;\,3)$: прямая через $(0;\,2)$ — $y = 2 - \dfrac{x}{2}$, через $(0;\,1)$ — $y = 1 - x$. Область видимости:

$$1 - x \le y \le 2 - \frac{x}{2}.$$

**3. Где видна вся картина.** Пересечение двух областей при $x > 0$: нижняя граница — большая из $1 - 2x$ и $1 - x$, то есть $1 - x$; верхняя — меньшая из $2 - x$ и $2 - x/2$, то есть $2 - x$:

$$1 - x \le y \le 2 - x \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \le x + y \le 2.$$

Это полоса между двумя диагоналями клеток (рисунок 3, закрашена).




*Сплошные прямые — границы области, откуда виден край $P_1^*$; штриховые — откуда виден $P_2^*$. Закрашено пересечение: отсюда видна вся картина.*

**4. Проверяем точки.** Подставляем координаты в $1 \le x + y \le 2$:

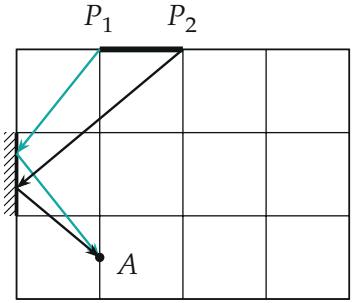
$$A:\ 1 + 0{,}5 = 1{,}5 \text{ — внутри полосы;}$$
$$B:\ 2 + 0{,}5 = 2{,}5 \text{ — вне;}$$
$$C:\ 2 + 2 = 4 \text{ — вне.}$$

Подробнее: из $B$ виден край $P_2^*$ ($1 - 2 \le 0{,}5 \le 2 - 1$), но не виден $P_1^*$ ($0{,}5 > 2 - 2 = 0$) — видна только часть картины. Из $C$ не виден ни один край: $2 > 2 - 2$ и $2 > 2 - 1$.

**5. Ход лучей из точки $A$.** Найдём точки зеркала, через которые идут лучи в глаз. Прямая $AP_1^*$ пересекает $x = 0$ при

$$y = 0{,}5 + (3 - 0{,}5) \cdot \frac{1}{1+1} = 1{,}75,$$

прямая $AP_2^*$ — при $y = 0{,}5 + 2{,}5 \cdot \dfrac{1}{1+2} \approx 1{,}33$. Обе точки на зеркале ($1 \le y \le 2$). Настоящий луч идёт от края картины к этой точке зеркала и, отразившись, в глаз (рисунок 4).




*Лучи от краёв картины, отразившись от зеркала, попадают в точку $A$.*

**Обратите внимание.** Важно не «видна ли картина вообще», а видны ли *оба* края. Из точки $B$ отражение видно, но только частично — это ловушка задачи.

**Ответ:** только из точки $A$ (из $B$ — частично, из $C$ — не видно).

**Проверка.** Второй способ — закон отражения для точки $B$: луч от $P_1$ в $B$ должен отражаться от стены $x = 0$ в точке $y = 0{,}5 + 2{,}5 \cdot \frac{2}{3} \approx 2{,}17$ — выше верхнего края зеркала, там стена, отражения нет. Значит, левый край картины из $B$ не виден, что совпадает с шагом 4.

**Ответ.** Только из точки $A$.