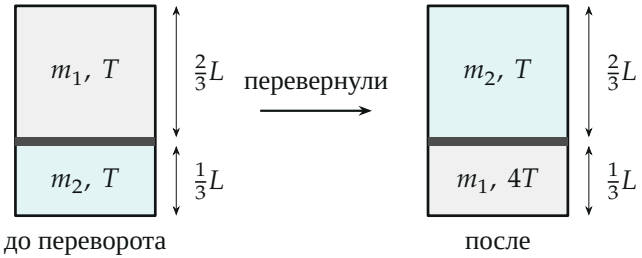
Газы по обе стороны поршня

Задача 4. [Курчатов 2014/15, 10 класс, задача 4] Герметичный теплонепроницаемый вертикальный цилиндрический сосуд разделён массивным теплонепроницаемым горизонтальным тонким поршнем, скользящим вдоль стенок без трения. В обеих частях сосуда находится один и тот же идеальный газ. Известно, что при температуре T в обеих частях сосуда поршень делит сосуд в отношении 2 : 1, считая от его верхнего торца. Если перевернуть сосуд и нагреть оказавшийся под поршнем газ до температуры $4T$, а температуру второй части оставить неизменной, то поршень вновь разделит сосуд в отношении 2 : 1, считая от верхнего торца. Чему равно отношение масс газов, разделённых поршнем?



Поясняющий рисунок: сосуд до и после переворота. Поршень оба раза стоит на высоте $\frac{1}{3}L$ от дна.

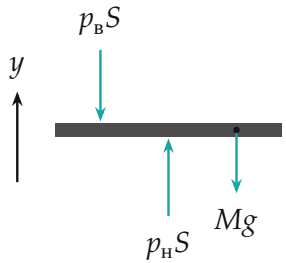
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие поршня и уравнение состояния идеального газа (Менделеева — Клапейрона). Поршень массивный, поэтому давление под ним больше давления над ним на одну и ту же величину $\Delta p = Mg/S$ — и до переворота, и после. Масса поршня неизвестна, но она одна и та же: приравниваем две разности давлений и получаем связь масс газов. Газы одинаковые, поэтому отношение масс равно отношению количеств вещества.

Обозначения. m_1, ν_1 — масса и количество вещества газа, который сначала был *сверху*; m_2, ν_2 — газа, который сначала был снизу; μ — молярная масса; V — объём сосуда, S — площадь поршня, M — его масса; $p_в$, $p_н$ — давления над и под поршнем.

1. Равновесие поршня. Второй закон Ньютона для покоящегося поршня в проекции на вертикальную ось y, направленную вверх (рисунок 2): снизу газ давит силой $p_\text{н}S$ вверх, сверху газ — силой $p_\text{в}S$ вниз, тяжесть Mg вниз, трения нет:

$$p_\text{н}S - p_\text{в}S - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\text{н} - p_\text{в} = \frac{Mg}{S} \equiv \Delta p.$$

Правая часть не зависит от того, какой газ где находится, — это ключ к задаче.



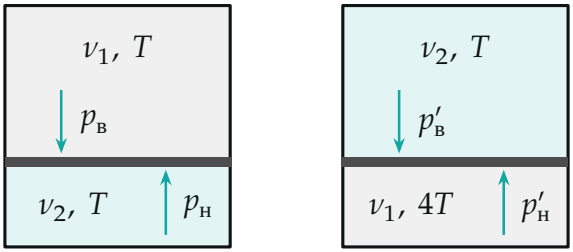
Силы, действующие на поршень. Ось y направлена вверх.

2. Давления до переворота. Уравнение Менделеева — Клапейрона $pV_\text{газа} = \nu RT$ для каждого газа. Сверху газ ν_1 занимает $\frac{2}{3}V$, снизу газ ν_2 занимает $\frac{1}{3}V$, оба при T:

$$p_\text{в} = \frac{\nu_1 RT}{\frac{2}{3}V} = \frac{3}{2}\frac{\nu_1 RT}{V}, \qquad p_\text{н} = \frac{\nu_2 RT}{\frac{1}{3}V} = 3\frac{\nu_2 RT}{V}.$$

3. Давления после переворота. Теперь сверху газ ν_2 при T в объёме $\frac{2}{3}V$, снизу газ ν_1, нагретый до $4T$, в объёме $\frac{1}{3}V$:

$$p'_\text{в} = \frac{\nu_2 RT}{\frac{2}{3}V} = \frac{3}{2}\frac{\nu_2 RT}{V}, \qquad p'_\text{н} = \frac{\nu_1 R \cdot 4T}{\frac{1}{3}V} = 12\frac{\nu_1 RT}{V}.$$



до после

Какой газ давит на поршень сверху и снизу до и после переворота.

4. Приравниваем разности давлений. По шагу 1 $p_н - p_в = p'_н - p'_в = \Delta p$:

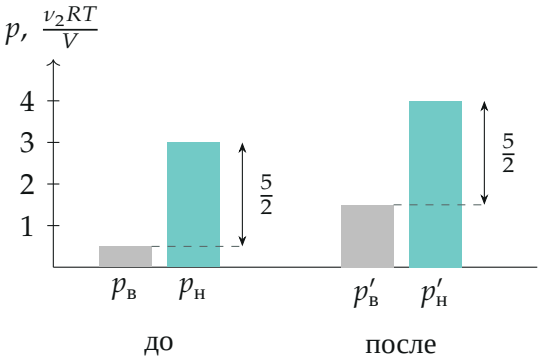
$$3\nu_2 - \frac{3}{2}\nu_1 = 12\nu_1 - \frac{3}{2}\nu_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{2}\nu_2 = \frac{27}{2}\nu_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{1}{3}.$$

Газ один и тот же, $m = \nu\mu$, поэтому

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{1}{3}.$$

Газа, который сначала был наверху, втрое меньше.

Проверка. Подставим $\nu_1 = \frac{1}{3}\nu_2$ и измерим давления в единицах $\nu_2 RT/V$. До: $p_в = \frac{1}{2}$, $p_н = 3$, разность $\frac{5}{2}$. После: $p'_в = \frac{3}{2}$, $p'_н = 4$, разность снова $\frac{5}{2}$ (рисунок 4). Разность положительна — поршень действительно давит вниз, как и должен массивный поршень. Размерность: в равенстве шага 4 обе части — количества вещества, отношение безразмерно.



Давления над и под поршнем при $m_1/m_2 = 1/3$: разность одинакова, $\Delta p = \frac{5}{2}\,\nu_2 RT/V$.

Обратите внимание. Ответ зависит от того, массу какого газа ставить в числитель: $\frac{1}{3}$ — это масса газа, который *до переворота был сверху* (и потом нагревался), к массе другого. Обратное отношение равно 3.

Ответ: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\nu_1}{\nu_2} = \dfrac{1}{3}$.

Смысл: массивный поршень «помнит» свою массу через неизменную разность давлений, и этого хватает, чтобы сравнить газы, не зная ни массы поршня, ни давлений.

Ответ. $m_1/m_2 = 1/3$, где m_1 — масса газа, который до переворота был над поршнем (его потом нагрели до $4T$), m_2 — масса другого газа.