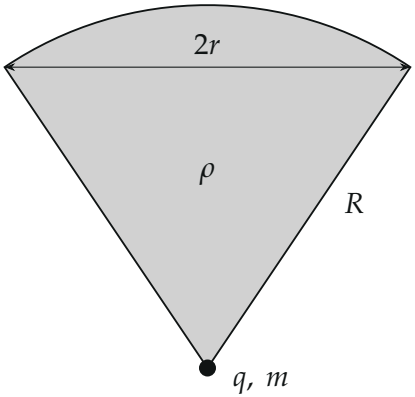
Пушка из заряженного шарового сектора

Задача 5. [Курчатов 2014/15, 10 класс, задача 5] Жители далекой планеты τ-Кита используют в качестве пушки устройство, которое работает на основе явления взаимодействия заряженных тел. Они вырезают из равномерно заряженного по объёму шара радиусом R сектор, ограниченный конусом с радиусом r при его основании. Объёмная плотность заряда «пушки» равна $\rho > 0$. К закреплённому орудию подносится маленькая дробинка массой m с зарядом $q > 0$, как показано на рисунке. Потом дробинку отпускают. Определите ускорение дробинки a_0 в момент сразу после её отпускания.

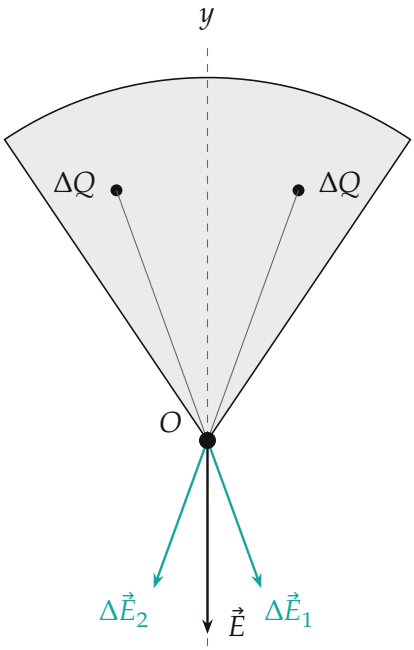


▲ **Решение. Что происходит.** Задача на принцип суперпозиции электрических полей. Дробинка в вершине конуса; в первый момент её скорость равна нулю, и ускорение даёт только сила $q\vec{E}$, где $\vec{E}$ — поле сектора в вершине. Сектор режем на тонкие сферические слои с центром в вершине: каждый слой — «шапочка» сферы, все её точки на одном расстоянии от дробинки, и поле шапочки в центре считается одним интегралом. Поле каждой шапочки оказывается не зависящим от её радиуса — поэтому сумма по слоям сводится к умножению на R.

Обозначения. O — вершина конуса (дробинка); ось y — ось симметрии сектора, вверх, к основанию; α — половина угла раствора конуса,

$\sin\alpha = r/R$; x — радиус тонкого слоя, Δx — его толщина; θ — угол между осью y и направлением на точку слоя.

1. Направление поля. Сектор симметричен относительно поворота вокруг оси y. Каждому заряду сектора найдётся симметричный ему относительно оси, и составляющие их полей поперёк оси взаимно уничтожаются. Остаётся составляющая вдоль оси; все заряды положительны и лежат выше O, поэтому $\vec{E}$ в точке O направлено вниз, от сектора, по $-y$ (рисунок 2).



Поля двух зарядов, симметричных относительно оси: поперечные составляющие гасятся, остаётся составляющая вдоль оси, вниз.

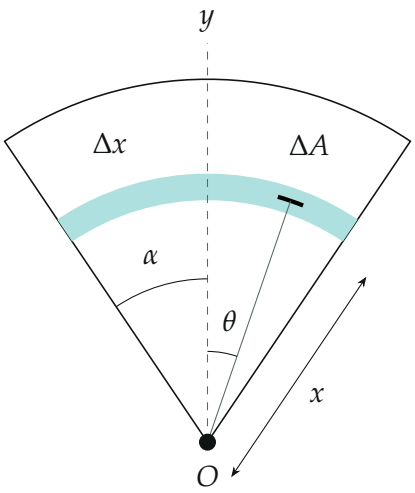
2. Поле тонкого сферического слоя. Возьмём слой радиусом x и толщиной $\Delta x \ll x$ (рисунок 3). Это шапочка сферы радиусом x с центром в O и с поверхностной плотностью заряда $\sigma = \rho\Delta x$. Разобьём шапочку на тонкие кольца между углами θ и $\theta + \Delta\theta$. Площадь кольца $\Delta A = 2\pi x \sin\theta \cdot x\,\Delta\theta$, его заряд $\sigma\,\Delta A$, и все точки кольца удалены от O

на x. По закону Кулона составляющая поля кольца вдоль оси

$$\Delta E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sigma\cdot 2\pi x^2\sin\theta\,\Delta\theta}{x^2}\cos\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta\,\Delta\theta.$$

Радиус x сократился: поле шапочки зависит только от её угла. Суммируем по θ от 0 до α, учитывая $\sin\theta\cos\theta\,\Delta\theta = \Delta\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)$:

$$E_{\text{сл}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{2} = \frac{\rho\,\Delta x\,\sin^2\alpha}{4\varepsilon_0}.$$



Тонкий слой радиусом x (закрашен) и узкое кольцо на нём под углом θ к оси.

3. Поле всего сектора. Поля всех слоёв направлены одинаково (по $-y$), и вклад каждого не зависит от x. Слоёв от $x = 0$ до $x = R$, их толщины в сумме дают R:

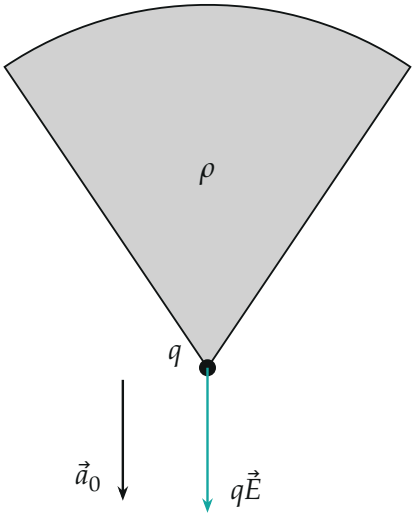
$$E = \sum\frac{\rho\,\Delta x\,\sin^2\alpha}{4\varepsilon_0} = \frac{\rho R\sin^2\alpha}{4\varepsilon_0} = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}\cdot\frac{r^2}{R^2} = \frac{\rho\,r^2}{4\varepsilon_0 R}.$$

4. Ускорение дробинки. Второй закон Ньютона для дробинки в проекции на ось y в момент отпускания (скорость ноль, тяжестью пренебре-

гаем — в условии о ней ни слова, пушка работает за счёт электричества):

$$ma_y = qE_y = -qE \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{qE}{m} = \frac{\rho\, q\, r^2}{4\varepsilon_0\, mR}.$$

Знак минус: дробинка разгоняется вниз, вылетает из «ствола» прочь от сектора (рисунок 4) — одноимённые заряды отталкиваются.



Сила, действующая на дробинку, и её ускорение направлены от сектора вдоль оси.

Обратите внимание. Нельзя считать сектор точечным зарядом в его центре масс: заряд подходит к дробинке вплотную, и ближние слои дают такой же вклад, как дальние. Именно поэтому поле конечно и пропорционально R, а не $1/R^2$.

Ответ: $a_0 = \dfrac{qE}{m} = \dfrac{\rho\, q\, r^2}{4\varepsilon_0\, mR}$, направлено от сектора вдоль его оси.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\rho r^2}{\varepsilon_0 R}$ — $\dfrac{\text{Кл/м}^3 \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)\cdot\text{м}} = \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}}$ — напряжённость; умноженная на q/m даёт Н/кг $=$ м/с^2. Предел $\alpha \to 90°$ ($r \to R$): сектор становится полушаром, $E = \rho R/(4\varepsilon_0)$. Второй способ — прямое численное сложение полей малых объёмов сектора (python, $R = 1$,

$\alpha = 34°$, в единицах ρ/ε_0): $E = 0{,}0782$, по формуле $\frac{1}{4}\sin^2 34° = 0{,}0782$. Предел $r \to 0$: сектор сжимается в иглу, $a_0 \to 0$.

Ответ. $a_0 = \dfrac{\rho q r^2}{4\varepsilon_0 mR}$, направлено вдоль оси сектора от него.