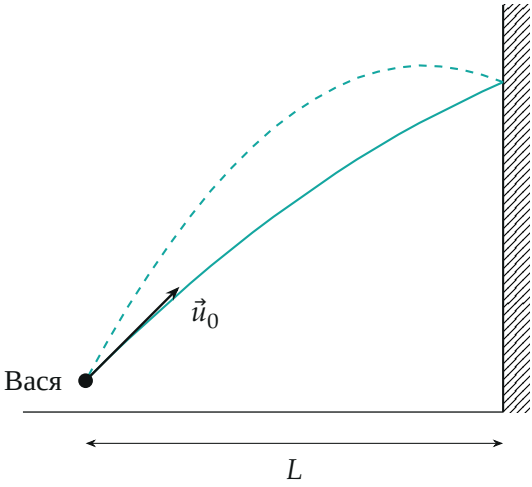
Мяч от стены обратно к бросающему

Задача 1. [Курчатов 2014/15, 11 класс, задача 1] Волейболист Вася хочет кинуть мяч в вертикальную стену с таким расчётом, чтобы мяч вернулся к нему в руки. Вася знает, что при ударе мяч отражается от стены «зеркально» (угол падения равен углу отражения), но при этом мяч теряет половину величины своей скорости. Василий умеет запускать мяч в любом направлении со скоростью не большей, чем u_0. Найдите максимальное расстояние от места бросания до стены, при котором он сможет осуществить задуманное. Ускорение свободного падения g. Вася не движется по спортзалу, место бросания мяча совпадает с местом, в котором Вася его ловит.



Поясняющий рисунок: сплошная линия — полёт до стены, штриховая — после удара.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение тела, брошенного под углом к горизонту, с ударом о стену. В полёте на мяч действует только сила тяжести: по горизонтали он летит равномерно, по вертикали — равноускоренно. При ударе обе проекции скорости уменьшаются вдвое (угол сохраняется, модуль — вдвое меньше), горизонтальная ещё

и меняет знак. Главная идея: назад мяч летит вдвое медленнее по горизонтали, значит, вдвое дольше; за всё время полёта $3t$ мяч должен по вертикали вернуться на исходную высоту.

Обозначения. u — скорость броска, α — угол броска к горизонту, L — расстояние до стены, t — время полёта до стены. Ось x — горизонтально к стене, ось y — вертикально вверх, начало — в точке броска (рисунок 1).

1. Полёт до стены. Второй закон Ньютона для мяча: $m\vec{a} = m\vec{g}$, то есть $a_x = 0$, $a_y = -g$. По горизонтали — равномерное движение со скоростью $u\cos\alpha$:

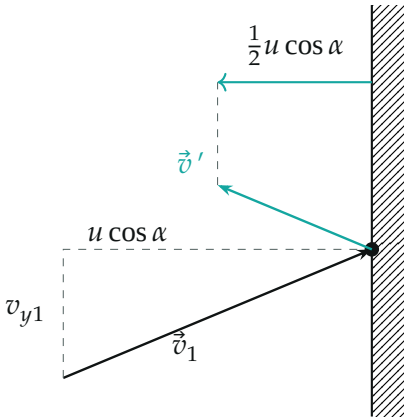
$$L = u\cos\alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{u\cos\alpha}.$$

По вертикали к моменту удара

$$y_1 = u\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \qquad v_{y1} = u\sin\alpha - gt.$$

2. Удар о стену. Отражение зеркальное: проекция скорости на нормаль к стене (ось x) меняет знак, проекция на стену (ось y) сохраняет знак; модуль скорости уменьшается вдвое при том же угле, значит, каждая проекция уменьшается вдвое (рисунок 2):

$$v'_x = -\frac{u\cos\alpha}{2}, \qquad v'_y = \frac{u\sin\alpha - gt}{2}.$$



Скорость мяча до удара $\vec{v}_1$ и после $\vec{v}\,'$: угол с нормалью тот же, модуль и каждая проекция — вдвое меньше.

3. Полёт обратно. По горизонтали мяч проходит то же расстояние L, но со скоростью $\frac{1}{2}u\cos\alpha$, поэтому время обратного полёта

$$t_2 = \frac{L}{\frac{1}{2}u\cos\alpha} = 2t.$$

За это время по вертикали мяч должен вернуться в точку броска $y = 0$ (закон равноускоренного движения от точки удара):

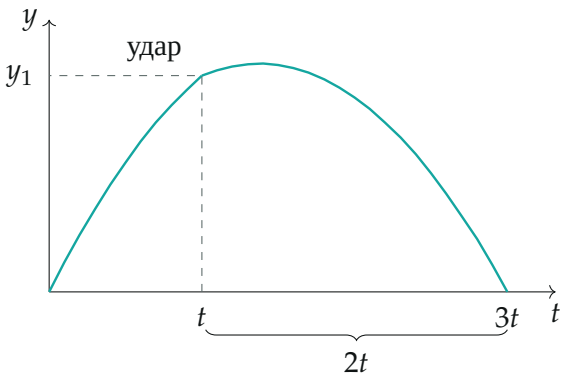
$$y_1 + v'_y \cdot 2t - \frac{g(2t)^2}{2} = 0.$$

4. Условие возврата. Подставим y_1 и v'_y:

$$u\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} + (u\sin\alpha - gt)\,t - 2gt^2 = 0,$$

$$2u\sin\alpha = \frac{7}{2}gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4u\sin\alpha}{7g}.$$

Удар происходит выше точки броска: $y_1 = t\left(u\sin\alpha - \frac{gt}{2}\right) = \frac{5}{7}u\sin\alpha \cdot t > 0$, то есть мяч долетает до стены, не упав на пол. График высоты от времени — на рисунке 3.



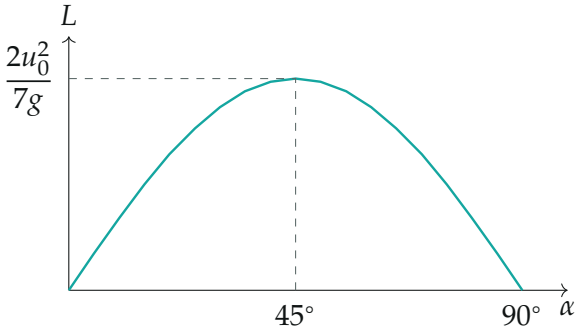
Высота мяча от времени при $\alpha = 45°$ (по вычисленным точкам): излом в момент удара — вертикальная скорость скачком уменьшилась вдвое.

5. Расстояние до стены. Из пункта 1 $L = u\cos\alpha \cdot t$:

$$L = u\cos\alpha \cdot \frac{4u\sin\alpha}{7g} = \frac{2u^2\sin 2\alpha}{7g}.$$

6. Максимум. L растёт с u, поэтому бросать надо с наибольшей скоростью $u = u_0$; $\sin 2\alpha$ максимален и равен 1 при $\alpha = 45°$ (рисунок 4). Получаем

$$L_{\max} = \frac{2u_0^2}{7g}.$$



Расстояние $L(\alpha)$ при $u = u_0$ — по точкам $\frac{2u_0^2}{7g}\sin 2\alpha$: максимум при $45°$.

Ответ: $L_{\max} = \dfrac{2u_0^2}{7g}$ (бросок со скоростью u_0 под углом $45°$).

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}/\text{с}^2} = \text{м}$. Предел: если бы стена отражала мяч без потерь, назад он летел бы время t, и условие возврата стало бы $y(2t) = 0$ — это обычный бросок на дальность $2L$: $2L = \frac{u_0^2}{g}$, $L = \frac{u_0^2}{2g}$; потеря скорости уменьшила ответ в $\frac{7}{4}$ раза — разумно. Смысл: мяч, потерявший половину скорости, должен успеть «долететь» назад, поэтому стена должна быть почти вдвое ближе, чем при упругом ударе.

Ответ. $L_{\max} = \dfrac{2u_0^2}{7g}$ (при угле броска $\alpha = 45°$ и скорости u_0).