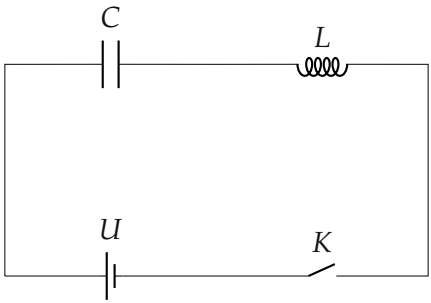
Источник, конденсатор и катушка

Задача 5. [Курчатов 2014/15, 11 класс, задача 5] Из идеального источника напряжения с ЭДС U, конденсатора ёмкостью C, катушки с индуктивностью L и ключа K собрана цепь, схема которой приведена на рисунке. Изначально конденсатор не заряжен, а ключ разомкнут. Найдите максимальную силу тока в цепи и максимальный заряд конденсатора после замыкания ключа.



▲ **Решение. Что происходит.** Это колебательный контур с источником: после замыкания ключа ток нарастает, конденсатор заряжается, катушка «по инерции» продолжает гнать ток и тогда, когда напряжение на конденсаторе уже сравнялось с U, — конденсатор перезаряжается выше U. Сопротивления нет, энергия не теряется: работа источника идёт в энергию конденсатора и катушки. Главная идея — закон сохранения энергии в двух особых моментах: при максимальном заряде ток равен нулю, при максимальном токе напряжение на катушке равно нулю.

Обозначения. q — заряд конденсатора, $I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ — сила тока; $q_{\max}$, $I_{\max}$ — искомые величины. Направление обхода — по току (рисунок 2).

1. Энергия в цепи. Через источник прошёл заряд q (в последовательной цепи — тот же, что на конденсаторе), источник совершил работу Uq. Она идёт на энергию конденсатора и энергию магнитного поля катушки (закон сохранения энергии для цепи без сопротивления):

$$Uq = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}.$$

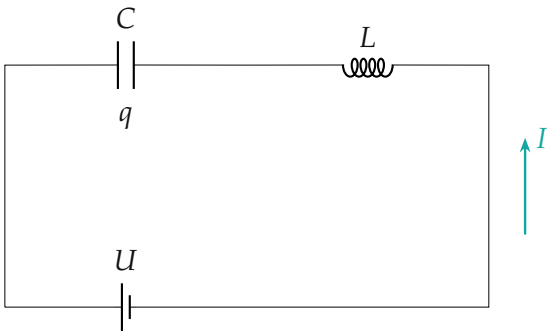


Схема после замыкания ключа: ток I, заряд конденсатора q.

2. Максимальный заряд. В момент, когда заряд максимален, он перестаёт расти: $I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t} = 0$. Энергия катушки равна нулю:

$$Uq_{\max} = \frac{q_{\max}^2}{2C} \quad \Rightarrow \quad q_{\max} = 2CU.$$

Корень $q = 0$ — начальный момент. Напряжение на конденсаторе в этот момент $2U$ — вдвое больше ЭДС.

3. Максимальный ток. Закон Кирхгофа для контура: $U = \dfrac{q}{C} + L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$. В момент максимума тока $\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = 0$, значит, напряжение на катушке равно нулю, и $\dfrac{q}{C} = U$, $q = CU$. Подставим в закон сохранения энергии:

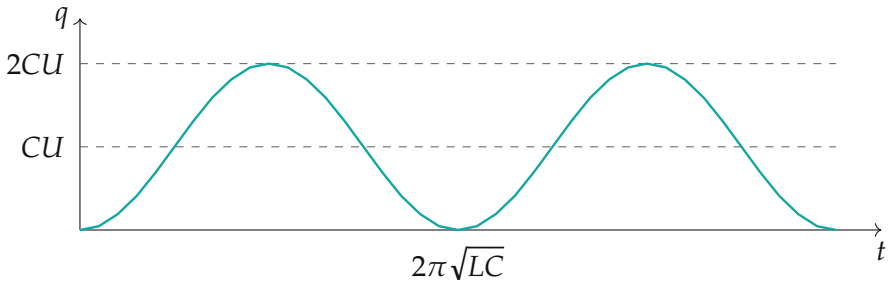
$$U \cdot CU = \frac{(CU)^2}{2C} + \frac{LI_{\max}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{CU^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I_{\max} = U\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

4. Как это выглядит во времени. Уравнение из пункта 3 — это уравнение колебаний вокруг равновесного заряда CU с частотой $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$: при начальных $q = 0$, $I = 0$

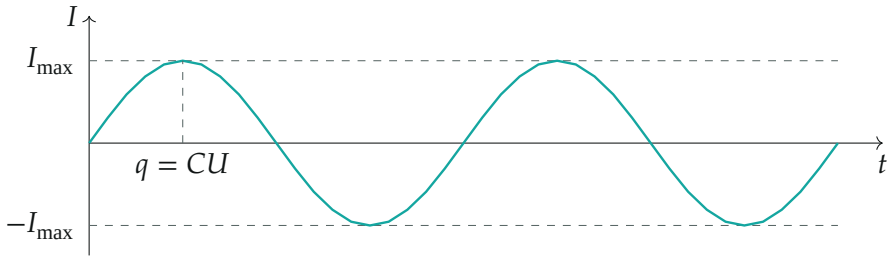
$$q(t) = CU(1 - \cos\omega t), \qquad I(t) = \omega CU \sin\omega t.$$

Отсюда второй раз: $q_{\max} = 2CU$, $I_{\max} = \omega CU = U\sqrt{C/L}$ (рисунки 3 и

4). Ток максимален при $q = CU$, а заряд максимален при $I = 0$ — то, что мы использовали.



Заряд конденсатора $q(t) = CU(1 - \cos \omega t)$ (по точкам): колебания около CU от 0 до $2CU$.



Сила тока $I(t) = I_{\max} \sin \omega t$ (по точкам): максимум, когда заряд проходит значение CU.

Обратите внимание. Конденсатор заряжается не до U, а до $2U$: катушка не даёт току мгновенно прекратиться. При максимальном заряде вся работа источника $Uq_{\max} = 2CU^2$ запасена в конденсаторе; при максимальном токе работа $U \cdot CU = CU^2$ делится поровну между конденсатором и катушкой.

Ответ: $I_{\max} = U\sqrt{\dfrac{C}{L}}$, $q_{\max} = 2CU$.

Проверка. Размерность: $\text{В}\sqrt{\dfrac{\Phi}{\text{Гн}}} = \text{В}\sqrt{\dfrac{\text{Кл/В}}{\text{В} \cdot \text{с/А}}} = \text{В} \cdot \dfrac{\text{А}}{\text{В}} = \text{А}$. Предел $L \to 0$: $I_{\max} \to \infty$ — без катушки и сопротивления ток при замыкании

ничем не ограничен, разумно. Оба ответа получены двумя способами (энергия и решение уравнения колебаний).

Ответ. $I_{\max} = U\sqrt{\dfrac{C}{L}}$, $q_{\max} = 2CU$.