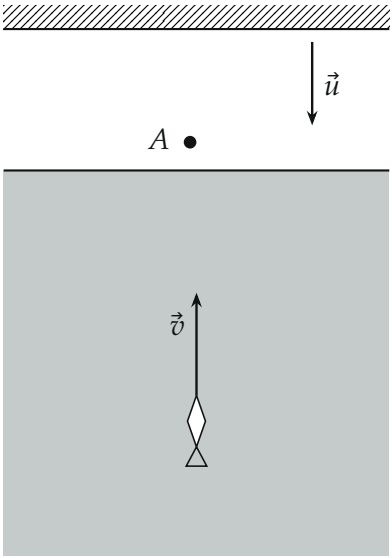
Рыбка и движущееся зеркало

Задача 6. [Курчатов 2014/15, 11 класс, задача 6] Маленькая рыбка плывёт к стенке аквариума со скоростью v. Параллельно стенке аквариума расположено плоское зеркало, которое перемещается со скоростью u в сторону аквариума (см. рисунок). Чему равна скорость изображения рыбки в зеркале с точки зрения наблюдателя, находящегося в точке A, и с точки зрения рыбки? Показатель преломления воды n, стенки аквариума тонкие и прозрачные.



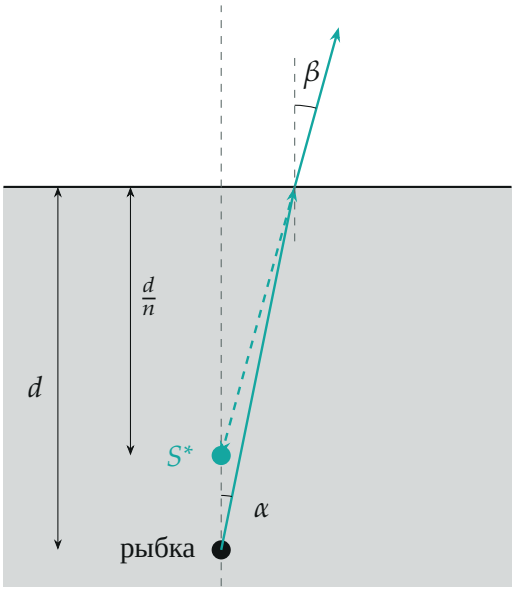
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на изображение в системе «плоская граница воды + плоское зеркало» в параксиальном приближении. Плоская граница не меняет поперечного положения, но сдвигает кажущуюся глубину: из воздуха предмет в воде виден на глубине в n раз меньше, а из воды предмет в воздухе — в n раз дальше. Плоское зеркало даёт изображение, симметричное предмету. Скорость изображения находим как производную по времени его координаты.

Обозначения. d — расстояние от рыбки до стенки, h — от стенки до зеркала. Ось y — перпендикулярно стенке, вверх на рисунке (от воды

к зеркалу), начало — на стенке. Тогда $\dfrac{\Delta d}{\Delta t} = -v$ (рыбка приближается к стенке), $\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = -u$ (зеркало приближается). Точка A — у стенки, в воздухе.

1. Кажущаяся глубина рыбки из воздуха. Возьмём два луча от рыбки: вдоль нормали к стенке и под малым углом α (рисунок 2). Закон преломления на границе вода–воздух: $n \sin\alpha = \sin\beta$; в глаз попадают лишь лучи с малыми углами, поэтому $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ и $\beta \approx n\alpha$. Луч выходит из стенки на расстоянии $x = d\operatorname{tg}\alpha \approx d\alpha$ от нормали; продолжение преломлённого луча пересекает нормаль на глубине

$$d' = \frac{x}{\operatorname{tg}\beta} \approx \frac{d\alpha}{n\alpha} = \frac{d}{n}.$$



Луч от рыбки преломляется на стенке; его продолжение (штрих) пересекает нормаль на глубине d/n — там из воздуха видна рыбка S^*. Лучи построены для $n = 1{,}33$.

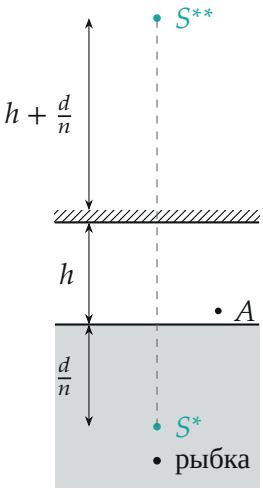
2. Изображение для наблюдателя A**.** Для наблюдателя в воздухе рыбка — предмет S^* на расстоянии $h+\dfrac{d}{n}$ от зеркала. Зеркало даёт изображение S^{**} на таком же расстоянии за зеркалом (рисунок 3). Координаты по оси y:

$$y_з = h, \qquad y_{S^*} = -\frac{d}{n}, \qquad y_{S^{**}} = 2y_з - y_{S^*} = 2h + \frac{d}{n}.$$

Наблюдатель A неподвижен, поэтому скорость изображения относительно него — производная координаты:

$$v_A = \frac{\Delta y_{S^{**}}}{\Delta t} = 2\frac{\Delta h}{\Delta t} + \frac{1}{n}\frac{\Delta d}{\Delta t} = -\left(2u + \frac{v}{n}\right).$$

Знак минус: изображение движется к наблюдателю (вниз на рисунке), со скоростью $2u + \dfrac{v}{n}$.

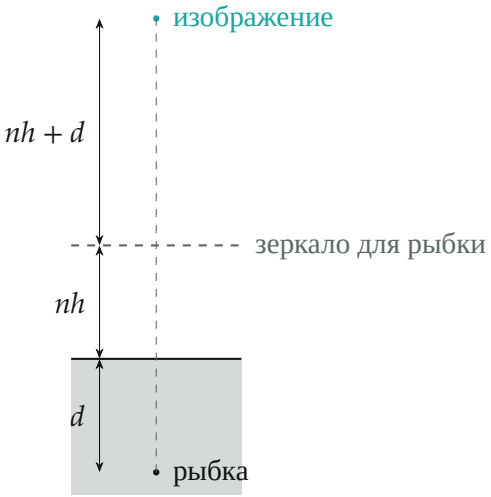


Для наблюдателя в воздухе: кажущаяся рыбка S^* и её изображение в зеркале S^{**} на расстоянии $h + d/n$ за зеркалом.

3. Изображение для рыбки. Теперь смотрит рыбка из воды. Лучи от неё выходят в воздух, отражаются от зеркала и возвращаются в воду. Для наблюдателя в воздухе изображение S^{**} находится на расстоянии

$2h + \dfrac{d}{n}$ от стенки. Рыбка видит этот «предмет в воздухе» через ту же границу; по пункту 1 с обратным ходом лучей расстояния в воздухе для глаза в воде увеличиваются в n раз: кажущееся расстояние от стенки $n\left(2h + \dfrac{d}{n}\right) = 2nh + d$. Сама рыбка — на расстоянии d по другую сторону стенки (рисунок 4). Расстояние от рыбки до видимого ей изображения

$$D = d + 2nh + d = 2(nh + d).$$



Для рыбки воздушный промежуток h «растягивается» до nh: всё равно что зеркало в воде на расстоянии nh от стенки; изображение — на $nh + d$ за ним (построено для $n = 1{,}33$, $h = 1{,}5$, $d = 2$ в условных единицах).

4. Скорость изображения для рыбки.

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = 2\left(n\frac{\Delta h}{\Delta t} + \frac{\Delta d}{\Delta t}\right) = -2(nu + v).$$

Расстояние уменьшается: изображение приближается к рыбке со скоростью $2(nu + v)$.

Обратите внимание. Наблюдатель A неподвижен, а зеркало движется: скорость изображения для него — изменение расстояния от *стенки*

до изображения, $2h+\frac{d}{n}$, а не от зеркала ($h+\frac{d}{n}$). У организаторов в ответе первой части $u+\frac{v}{n}$: продифференцировано расстояние от движущегося зеркала до изображения; при этом во второй части они сами берут расстояние от стенки $2h+\frac{d}{n}$.

Ответ: для наблюдателя в A изображение движется к нему со скоростью $2u+\dfrac{v}{n}$; для рыбки — к ней со скоростью $2(nu+v)$.

Проверка. При $n=1$ (воды нет) обе скорости должны совпадать с обычным зеркалом: для неподвижного A изображение предмета, движущегося к зеркалу со скоростью v, при зеркале, движущемся со скоростью u, имеет скорость $2u+v$ — наш ответ даёт $2u+v$; для самого предмета сближение с изображением $2(u+v)$ — совпадает. При $u=0$ для A остаётся v/n: изображение повторяет движение кажущейся рыбки — верно.

Ответ. Для наблюдателя в точке A изображение движется к нему со скоростью $2u+\dfrac{v}{n}$; с точки зрения рыбки изображение движется к ней со скоростью $2(nu+v)$.