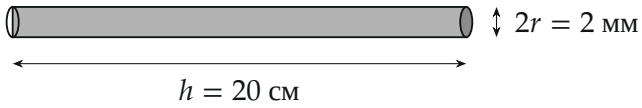
Длина следа карандаша

Задача 1. [Курчатов 2014/15, 7 класс, задача 1] Оцените максимальную длину следа, который твердый «простой» карандаш может оставить на бумаге, если известно, что грифель является цилиндром радиусом 1 мм и высотой 20 см, а толщина следа постоянна и равна 6 нм.

Примечание: объём V цилиндра рассчитывается по формуле $V = \pi r^2 h$, где r — радиус цилиндра, h — его высота, $\pi \approx 3{,}14$.

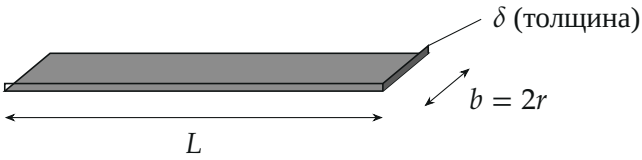


Поясняющий рисунок: грифель — цилиндр радиуса r и высоты h (поперечник увеличен).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача-оценка на сохранение объёма вещества. При письме грифель стирается, и графит ложится на бумагу тонким слоем. Плотность графита не меняется, поэтому объём следа равен объёму стёршегося грифеля. Максимальная длина — когда стёрт весь грифель. След — очень тонкая «полоска»: прямоугольный параллелепипед, у которого длина L, ширина b и толщина δ.

Обозначения. $r = 1$ мм $= 10^{-3}$ м, $h = 20$ см $= 0{,}2$ м — радиус и высота грифеля; $\delta = 6$ нм $= 6 \cdot 10^{-9}$ м — толщина следа; b — ширина следа; L — длина следа.

1. Ширина следа. Карандаш затачивают и пишут торцом грифеля; для оценки примем, что ширина следа равна диаметру грифеля, $b = 2r = 2$ мм (рисунок 2). При более тонкой линии след вышел бы ещё длиннее — оценка максимальной длины для такого сечения.



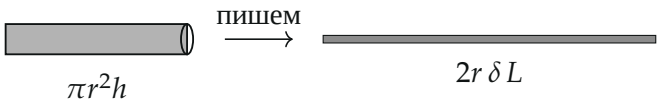
След — плоская полоска длины L, ширины b и толщины δ (толщина на рисунке сильно преувеличена).

2. Объёмы. Объём грифеля — по формуле объёма цилиндра, объём следа — как у прямоугольного параллелепипеда:

$$V_{\text{гр}} = \pi r^2 h, \qquad V_{\text{сл}} = L\,b\,\delta = 2r\,\delta\,L.$$

3. Сохранение объёма. Весь графит грифеля перешёл в след: $V_{\text{сл}} = V_{\text{гр}}$ (рисунок 3):

$$2r\,\delta\,L = \pi r^2 h \quad\Longrightarrow\quad L = \frac{\pi r h}{2\delta}.$$



Тот же объём графита: короткий толстый цилиндр превращается в очень длинную и тонкую полоску.

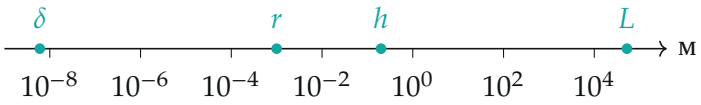
4. Числа.

$$L = \frac{3{,}14\cdot 10^{-3}\text{ м}\cdot 0{,}2\text{ м}}{2\cdot 6\cdot 10^{-9}\text{ м}} = \frac{6{,}28\cdot 10^{-4}}{1{,}2\cdot 10^{-8}}\text{ м} \approx 5{,}23\cdot 10^{4}\text{ м} \approx 52\text{ км}.$$

5. Масштаб. Сравним: длина следа больше высоты грифеля в

$$\frac{L}{h} = \frac{\pi r}{2\delta} = \frac{3{,}14\cdot 10^{-3}}{1{,}2\cdot 10^{-8}} \approx 2{,}6\cdot 10^{5}\text{ раз},$$

а толщина следа меньше радиуса грифеля в $r/\delta \approx 1{,}7\cdot 10^{5}$ раз. Порядки длин — на рисунке 4 (логарифмическая шкала).



Размеры на логарифмической шкале: от нанометров (толщина следа) до десятков километров (длина следа).

Обратите внимание. Ширина следа — допущение оценки. Если карандаш наклонён или заточен до остроты, линия тоньше 2 мм; ответ меняется обратно пропорционально ширине, но порядок — десятки километров — сохраняется.

Ответ:

$$L = \frac{\pi r h}{2\delta} \approx 5 \cdot 10^4 \text{ м} \approx 52 \text{ км}.$$

Проверка. Размерность: $\frac{\text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}} = \text{м}$. Обратная проверка объёмом: $2r\,\delta\,L = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-9} \cdot 5{,}23 \cdot 10^4 \approx 6{,}28 \cdot 10^{-7}$ м^3 и $\pi r^2 h = 3{,}14 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}2 = 6{,}28 \cdot 10^{-7}$ м^3 — совпадает.

Ответ. $L = \frac{\pi r h}{2\delta} \approx 52$ км.