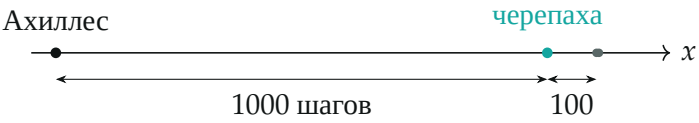
Ахиллес и черепаха

Задача 2. [Курчатов 2014/15, 7 класс, задача 2] Ахиллес преследует черепаху. В момент начала движения черепаха находится на 1000 шагов впереди Ахиллеса, а затем ползёт от Ахиллеса по прямой с постоянной скоростью. Ахиллес пробегает первые 1000 шагов с постоянной скоростью 200 шагов в минуту и видит, что черепаха за это время уползла на 100 шагов. Поняв, что так дело не пойдёт, Ахиллес ускоряется, и всё-таки настигает черепаху. Весь забег длится 5 минут 15 секунд. Чему равна средняя скорость Ахиллеса за всё время забега?



Поясняющий рисунок: старт. Серые точки — где черепаха через 5 мин и в конце забега.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на среднюю скорость: весь путь, делённый на всё время. Как именно Ахиллес ускорялся, неизвестно — и не нужно: путь Ахиллеса равен начальному отставанию плюс путь черепахи (он её догнал). Путь черепахи находится по её постоянной скорости.

Обозначения. Ось x — вдоль дорожки от старта Ахиллеса; $d = 1000$ шагов — начальное расстояние; $v_1 = 200$ шагов/мин — скорость Ахиллеса на первом участке; u — скорость черепахи; $\tau = 5$ мин 15 с $= 5{,}25$ мин — время забега; s — путь Ахиллеса; $v_{\text{ср}}$ — его средняя скорость.

1. Первый участок и скорость черепахи. Ахиллес пробежал 1000 шагов со скоростью v_1 за

$$t_1 = \frac{1000 \text{ шагов}}{200 \text{ шагов/мин}} = 5 \text{ мин}.$$

За это же время черепаха проползла 100 шагов, её скорость

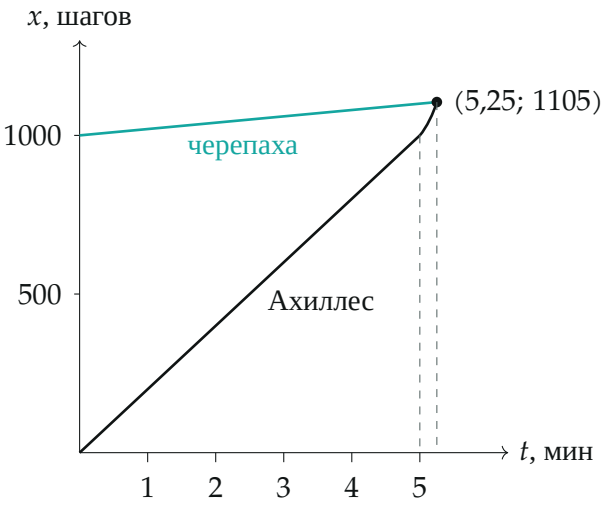
$$u = \frac{100 \text{ шагов}}{5 \text{ мин}} = 20 \frac{\text{шагов}}{\text{мин}}.$$

2. Путь черепахи за весь забег. Скорость черепахи постоянна:

$$s_ч = u\tau = 20 \cdot 5{,}25 = 105 \text{ шагов}.$$

3. Путь Ахиллеса. В конце забега координаты Ахиллеса и черепахи совпали (рисунок 2):

$$s = d + s_ч = 1000 + 105 = 1105 \text{ шагов}.$$

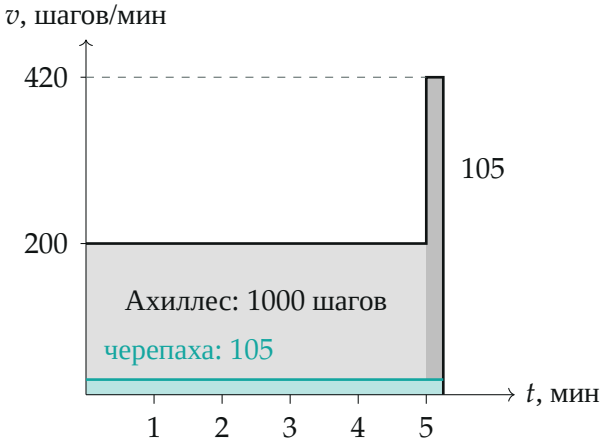


Графики координат: черепаха — прямая с малым наклоном, Ахиллес — прямая до 5 мин, затем быстрый рывок (его форма не важна); встреча — в точке (5,25; 1105).

4. Средняя скорость.

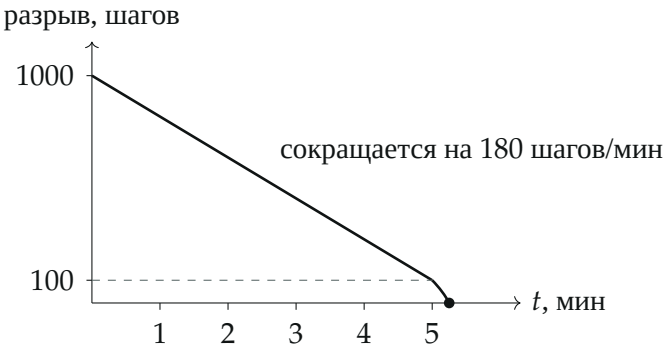
$$v_{ср} = \frac{s}{\tau} = \frac{1105 \text{ шагов}}{5{,}25 \text{ мин}} \approx 210 \frac{\text{шагов}}{\text{мин}}.$$

5. Что было на рывке. Последние $\tau - t_1 = 0{,}25$ мин $= 15$ с Ахиллес пробежал $1105 - 1000 = 105$ шагов — в среднем 420 шагов/мин, вдвое быстрее, чем на первом участке. На графике скорости (рисунок 3) путь — площадь под графиком: $200 \cdot 5 + 420 \cdot 0{,}25 = 1105$ шагов.



Скорости (на рывке — средняя): пути равны площадям. Серым — путь Ахиллеса, бирюзой — путь черепахи.

6. Второй взгляд — расстояние между бегунами. Пока Ахиллес бежит со скоростью 200, а черепаха ползёт со скоростью 20 шагов/мин в ту же сторону, расстояние сокращается со скоростью $200-20=180$ шагов/мин: за 5 мин — с 1000 до $1000-180\cdot 5=100$ шагов. Оставшиеся 100 шагов разрыва Ахиллес «съел» за 15 с (рисунок 4).



Расстояние между Ахиллесом и черепахой: за первые 5 мин оно уменьшилось до 100 шагов, за последние 15 с — до нуля.

Обратите внимание. Средняя скорость — не среднее арифметическое скоростей 200 и 420: на втором участке Ахиллес бежал в 20 раз меньше времени, и его вклад мал.

Ответ:

$$v_{\text{ср}} = \frac{d + u\tau}{\tau} = \frac{d}{\tau} + u \approx 210 \text{ шагов/мин}.$$

Проверка. Размерность — шаги в минуту. Второй способ: $v_{\text{ср}} = d/\tau + u = 1000/5{,}25 + 20 \approx 190{,}5 + 20 = 210{,}5$ шага/мин. Средняя скорость больше 200: на рывке Ахиллес бежал быстрее — согласуется.

Ответ. $v_{\text{ср}} \approx 210$ шагов/мин.