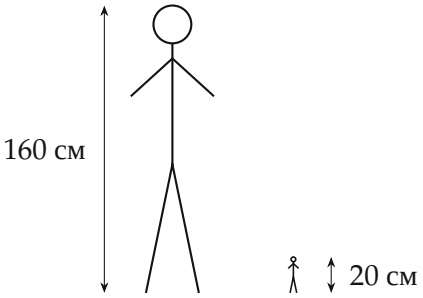
Статуэтка из золота и серебра

Задача 3. [Курчатов 2014/15, 7 класс, задача 3] Рост отличника Васи 1 м 60 см, его масса 55 кг. За особые успехи в олимпиаде по физике директор школы решил изготовить статуэтку высотой 20 см, которая будет являться точной копией Васи. Первоначально статуэтку планировали сделать из золота, но так как золота оказалось недостаточное количество, решили добавить серебро. Какую часть (в процентах) общей массы статуэтки составило серебро, если масса фигурки оказалась равной 1400 г? Так как человек на 80 % состоит из воды, то можно считать плотность Васи примерно равной плотности воды. Плотность золота 19,3 г/см^3, плотность серебра 10,5 г/см^3.



Поясняющий рисунок: Вася и его статуэтка — в масштабе 1 : 8.

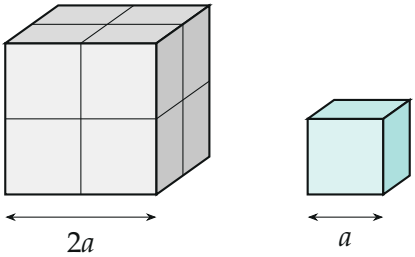
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на подобие тел и плотность смеси. Статуэтка — точная копия, уменьшенная по всем трём направлениям одинаково, поэтому её объём меньше объёма Васи в k^3 раз, где k — отношение высот. Объём Васи даёт его масса и плотность воды. Зная объём статуэтки и её массу, из двух уравнений (масса и объём сплава) находим, сколько в ней серебра.

Обозначения. $H = 160$ см, $h = 20$ см — рост Васи и высота статуэтки; $M_\text{В} = 55$ кг; $\rho_\text{в} = 1$ г/см^3; $\rho_\text{з} = 19{,}3$ г/см^3, $\rho_\text{с} = 10{,}5$ г/см^3; $m = 1400$ г — масса статуэтки; V — её объём; $V_\text{з}$, $V_\text{с}$ — объёмы золота и серебра; $m_\text{с}$ — масса серебра.

1. Во сколько раз меньше объём. Коэффициент подобия

$$k = \frac{H}{h} = \frac{160\text{ см}}{20\text{ см}} = 8.$$

Длина, ширина и толщина каждой части статуэтки в 8 раз меньше, поэтому объём меньше в $k^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ раз (рисунок 2: кубик со стороной в 2 раза меньше умещается в большом $2^3 = 8$ раз).



Сторона меньше в 2 раза — объём меньше в $2^3 = 8$ раз. У статуэтки размеры меньше в 8 раз, объём — в $8^3 = 512$ раз.

2. Объём Васи и статуэтки. Плотность Васи примерно равна плотности воды:

$$V_\text{В} = \frac{M_\text{В}}{\rho_\text{в}} = \frac{55\,000\text{ г}}{1\text{ г/см}^3} = 55\,000\text{ см}^3,$$

$$V = \frac{V_\text{В}}{k^3} = \frac{55\,000}{512}\text{ см}^3 \approx 107{,}4\text{ см}^3.$$

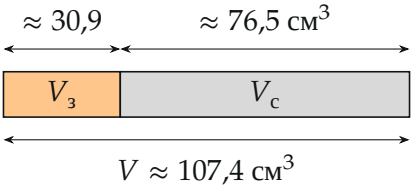
3. Масса и объём сплава. Статуэтка состоит из золота и серебра: объёмы складываются, массы складываются (рисунок 3):

$$V_\text{з} + V_\text{с} = V, \qquad \rho_\text{з} V_\text{з} + \rho_\text{с} V_\text{с} = m.$$

Подставим $V_\text{з} = V - V_\text{с}$ во второе уравнение:

$$\rho_\text{з} V - (\rho_\text{з} - \rho_\text{с}) V_\text{с} = m \quad \Longrightarrow \quad V_\text{с} = \frac{\rho_\text{з} V - m}{\rho_\text{з} - \rho_\text{с}}.$$

Смысл: золотая статуэтка весила бы $\rho_\text{з} V \approx 2073$ г; каждый кубический сантиметр серебра вместо золота облегчает её на $\rho_\text{з} - \rho_\text{с} = 8{,}8$ г.



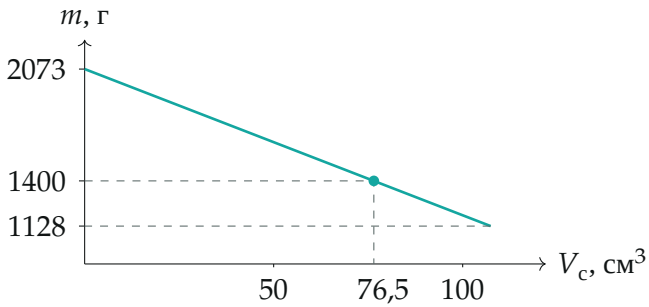
Объём статуэтки делится между золотом и серебром (в масштабе).

4. Числа.

$$V_с = \frac{19{,}3 \cdot 107{,}4 - 1400}{8{,}8}\ \text{см}^3 = \frac{673{,}2}{8{,}8}\ \text{см}^3 \approx 76{,}5\ \text{см}^3,$$

$$m_с = \rho_с V_с = 10{,}5 \cdot 76{,}5\ \text{г} \approx 803\ \text{г}, \qquad \frac{m_с}{m} = \frac{803}{1400} \approx 0{,}57 = 57\,\%.$$

5. Второй способ — график. Масса статуэтки линейно зависит от объёма серебра: от 2073 г (вся из золота) до $\rho_с V \approx 1128$ г (вся из серебра). Точка $m = 1400$ г на этой прямой даёт $V_с \approx 76{,}5$ см^3 (рисунок 4).



Масса статуэтки при разном объёме серебра; при $m = 1400$ г — $V_с \approx 76{,}5$ см^3.

Обратите внимание. Объём меняется как куб размера: уменьшить рост в 8 раз — значит уменьшить объём в 512, а не в 8 раз. И спрашивают долю *массы*, а не объёма: по объёму серебра $76{,}5/107{,}4 \approx 71\,\%$, по массе — 57 %.

Ответ:

$$\frac{m_\text{с}}{m} = \frac{\rho_\text{с}}{m} \cdot \frac{\rho_\text{з} M_\text{в} (h/H)^3 / \rho_\text{в} - m}{\rho_\text{з} - \rho_\text{с}} \approx 57\,\%.$$

Проверка. Размерность: дробь безразмерна. Масса золота $19{,}3 \cdot (107{,}4 - 76{,}5) \approx 597$ г, серебра 803 г, вместе 1400 г — сходится. Масса 1400 г лежит между 1128 г и 2073 г, поэтому доля серебра получилась от 0 до 100 %, как и должно.

Ответ. Серебро составляет около 57 % массы статуэтки.