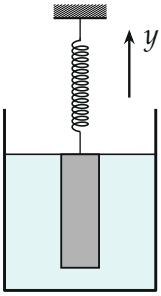
Цилиндр на пружине в сосуде

Задача 4. [Курчатов 2014/15, 7 класс, задача 4] В цилиндрический сосуд с водой опущен металлический цилиндр, подвешенный на пружине жёсткостью $k = 10$ Н/м. Уровень воды в сосуде совпадает с положением верхней поверхности цилиндра (см. рис.). После того, как точку подвеса пружины подняли вверх на $y = 5$ см, удлинение пружины увеличилось на $x = 2$ см, а верхняя поверхность цилиндра оказалась на $h = 4$ см выше уровня воды (нижняя поверхность цилиндра всё ещё в воде). Чему равна площадь поперечного сечения сосуда? Плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3, ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Архимеда, закон Гука и сохранение объёма воды. Поднимая подвес, мы вытягиваем цилиндр из воды; сила Архимеда уменьшается, и ровно на столько же растёт сила упругости пружины. Вода из сосуда никуда не девается: объём, освобождённый цилиндром, заполняется водой, и уровень опускается. Важно различать подъём цилиндра относительно сосуда и относительно нового уровня воды.

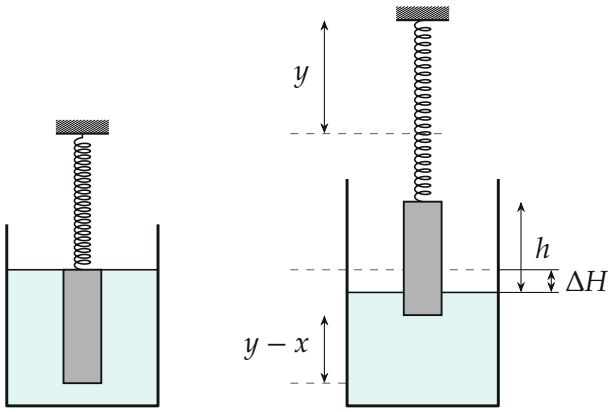
Обозначения. S — искомая площадь сечения сосуда, S_1 — площадь сечения цилиндра; ΔH — на сколько опустился уровень воды; $s = y - x$ — на сколько поднялся цилиндр относительно сосуда.

1. Перемещения: цилиндр и уровень воды. Подвес поднялся на y, пружина удлинилась на x, значит, нижний конец пружины (и цилиндр) поднялся относительно сосуда на

$$s = y - x = 5 \text{ см} - 2 \text{ см} = 3 \text{ см}.$$

Сначала верх цилиндра был на уровне воды, теперь он на h выше нового уровня. Верх поднялся на s, а уровень опустился на ΔH, поэтому $h = s + \Delta H$:

$$\Delta H = h - (y - x) = 4\text{ см} - 3\text{ см} = 1\text{ см}.$$



Было и стало. Пунктир — прежние уровень воды, низ цилиндра и потолок. Цилиндр поднялся на $y - x$, уровень воды опустился на ΔH, верх цилиндра теперь на h над водой.

2. Сила Архимеда и пружина: площадь цилиндра. Цилиндр покоится до и после. Второй закон Ньютона для цилиндра в проекции на вертикальную ось вверх:

$$F_{\text{упр}} + F_{\text{A}} - mg = 0.$$

Сила тяжести не изменилась, поэтому прирост силы упругости равен убыли силы Архимеда (рисунок 3):

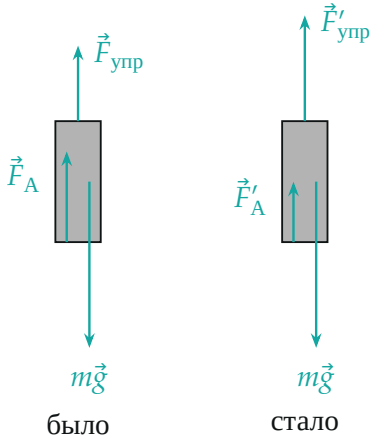
$$\Delta F_{\text{упр}} = -\Delta F_{\text{A}}.$$

По закону Гука $\Delta F_{\text{упр}} = kx$. Над водой оказалась часть цилиндра высо-

той h, погружённый объём уменьшился на $S_1 h$, и $|\Delta F_\text{A}| = \rho g S_1 h$:

$$kx = \rho g S_1 h \quad \Longrightarrow \quad S_1 = \frac{kx}{\rho g h},$$

$$S_1 = \frac{10 \cdot 0{,}02}{1000 \cdot 10 \cdot 0{,}04}\ \text{м}^2 = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 5\ \text{см}^2.$$



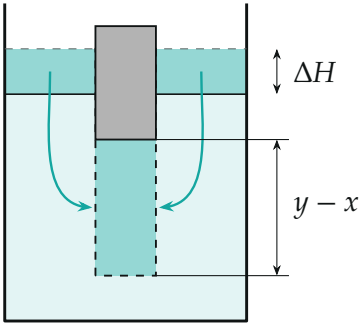
Силы, действующие на цилиндр. Сила тяжести та же; на сколько уменьшилась сила Архимеда, на столько выросла сила упругости.

3. Сохранение объёма воды: площадь сосуда. Объём воды не изменился. Над новым уровнем воды ничего не прибавилось, а под старым уровнем убыло: слой толщиной ΔH по всей площади сосуда, кроме сечения цилиндра, — объём $\Delta H (S - S_1)$. Эта вода ушла вниз и заняла место, которое освободил цилиндр под новым уровнем: столб высотой $h - \Delta H = y - x$ сечением S_1 (рисунок 4). Поэтому

$$\Delta H\,(S - S_1) = (h - \Delta H)\,S_1,$$

откуда $\Delta H\, S = h\, S_1$ и

$$S = \frac{h}{\Delta H}\,S_1 = \frac{4}{1} \cdot 5\ \text{см}^2 = 20\ \text{см}^2.$$



Нижняя часть сосуда (цилиндр показан не целиком). Вода из слоя ΔH вокруг цилиндра перетекла в объём под цилиндром, который он освободил, поднявшись на $y - x$; оба закрашенных объёма равны.

Обратите внимание. Цилиндр вышел из воды на $h = 4$ см, хотя сам поднялся только на $y - x = 3$ см: оставшийся 1 см даёт опускание уровня. Именно h, а не $y - x$, определяет изменение силы Архимеда.

Ответ:

$$S = \frac{h}{h - (y - x)} \cdot \frac{kx}{\rho g h} = \frac{kx}{\rho g\,(h - y + x)} = 20\ \text{см}^2.$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Н/м} \cdot \text{м}}{\text{кг/м}^3 \cdot \text{м/с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м}^2$. Предел: если сосуд очень широкий, уровень почти не меняется, $h \to y - x$ и $S \to \infty$ — так и должно быть. Второй способ: вытащенный объём цилиндра $S_1 h = 20\ \text{см}^3$ равен объёму, на который опустился уровень по всему сосуду, $S\,\Delta H = 20\ \text{см}^2 \cdot 1\ \text{см}$, — сходится.

Ответ. $S = 20\ \text{см}^2$.