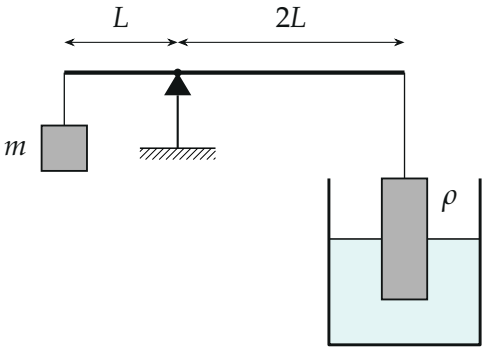
Цилиндр на рычажных весах

Задача 1. [Курчатов 2014/15, 8 класс, задача 1] На рычажных весах уравновешены вертикально расположенный однородный цилиндр и груз массой m. Цилиндр подвешен к плечу весов на лёгкой нити и наполовину погружен в воду, а длина плеча, к концу которого подвешен цилиндр, вдвое больше длины другого плеча. Если к грузу массой m прицепить ещё один груз такой же массой m, то равновесие будет достигнуто, если $2/3$ цилиндра будут находиться над водой. Найдите плотность ρ материала, из которого сделан цилиндр. Плотность воды равна $\rho_0 = 1{,}0$ г/см^3.



Поясняющий рисунок: груз m на коротком плече L, цилиндр на плече 2L наполовину в воде.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие рычага (правило моментов) и закон Архимеда. Нить тянет плечо весов с силой, равной весу цилиндра за вычетом выталкивающей силы. Когда груз на коротком плече удваивают, нить должна тянуть сильнее — для этого цилиндр поднимают из воды, и сила Архимеда уменьшается. Два состояния равновесия дают два уравнения; неизвестная масса груза из них исключается.

Обозначения. M, V — масса и объём цилиндра, $\rho = M/V$; L и $2L$ — плечи весов; T_1, T_2 — натяжение нити цилиндра в первом и втором случаях; F_{A1}, F_{A2} — силы Архимеда.

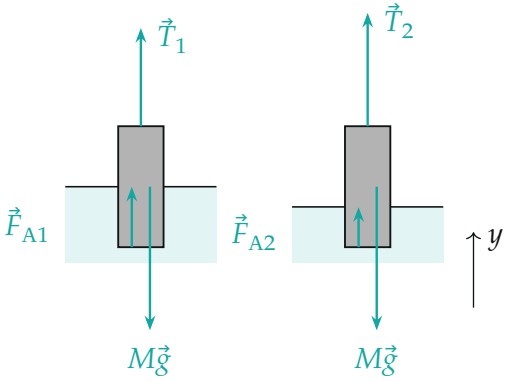
1. Силы, действующие на цилиндр. На цилиндр действуют сила тяжести $M\vec{g}$, натяжение нити $\vec{T}$ и сила Архимеда $\vec{F}_A$ (рисунок 2). Цилиндр

покоится — второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось y вверх:

$$T + F_A - Mg = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = Mg - \rho_0 g V_{\text{погр}}.$$

В первом случае погружена половина цилиндра, во втором — треть (две трети над водой):

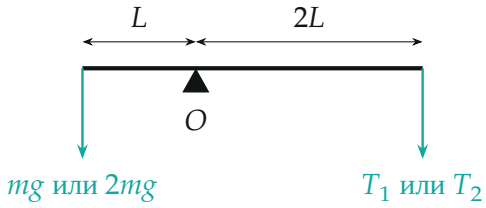
$$T_1 = Mg - \rho_0 g \frac{V}{2}, \qquad T_2 = Mg - \rho_0 g \frac{V}{3}.$$



Силы, действующие на цилиндр: погружена половина (случай 1) и треть (случай 2); во втором случае сила Архимеда меньше, натяжение нити больше.

2. Правило моментов для коромысла. Коромысло в равновесии: моменты сил относительно оси весов равны (рисунок 3). Груз тянет короткое плечо вниз силой, равной его весу, нить — длинное плечо силой T:

$$mg \cdot L = T_1 \cdot 2L, \qquad 2mg \cdot L = T_2 \cdot 2L.$$



Силы, поворачивающие коромысло вокруг оси O.

Отсюда $T_1 = \dfrac{mg}{2}$, $T_2 = mg$, то есть

$$T_2 = 2T_1.$$

3. Уравнение на плотность. Подставим натяжения из шага 1:

$$Mg - \rho_0 g\frac{V}{3} = 2\left(Mg - \rho_0 g\frac{V}{2}\right) = 2Mg - \rho_0 gV.$$

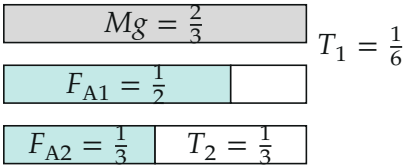
Переносим: $Mg = \rho_0 gV - \rho_0 g\dfrac{V}{3} = \dfrac{2}{3}\rho_0 gV$. Значит,

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{2}{3}\rho_0 = \frac{2}{3}\cdot 1{,}0\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \approx 0{,}67\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 667\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

4. Второй способ — через изменения. При переходе из случая 1 в случай 2 натяжение выросло на $\Delta T = T_2 - T_1 = T_1$, а погружённый объём уменьшился на $\frac{V}{2} - \frac{V}{3} = \frac{V}{6}$, то есть сила Архимеда упала на $\rho_0 g\frac{V}{6}$. Значит, $T_1 = \rho_0 gV/6$. Подставляем в $T_1 = Mg - \rho_0 gV/2$:

$$Mg = \rho_0 gV\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\rho_0 gV,$$

то же самое. Наглядно — рисунок 4: силы в долях $\rho_0 gV$.



Вес цилиндра делится между силой Архимеда и натяжением нити; во втором случае натяжение вдвое больше.

Обратите внимание. Масса груза m и длина плеча L в ответ не входят: удвоение груза требует удвоения натяжения нити, и одного этого условия хватает.

Ответ:

$$\rho = \frac{2}{3}\rho_0 \approx 667 \text{ кг/м}^3.$$

Проверка. Размерность — плотность. Плотность меньше плотности воды: свободный цилиндр плавал бы, погрузившись на $2/3$. Так и выходит: при $T = 0$ из $T = Mg - \rho_0 g V_{\text{погр}}$ получаем $V_{\text{погр}} = \frac{2}{3}V$ — больше, чем в обоих случаях задачи, и нить в них натянута ($T_1, T_2 > 0$).

Ответ. $\rho = \frac{2}{3}\rho_0 \approx 667$ кг/м^3.