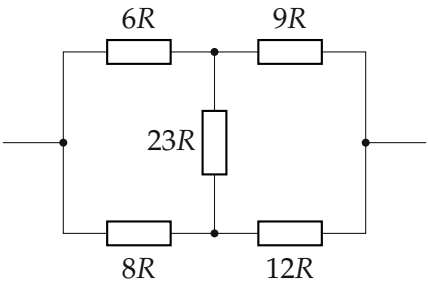
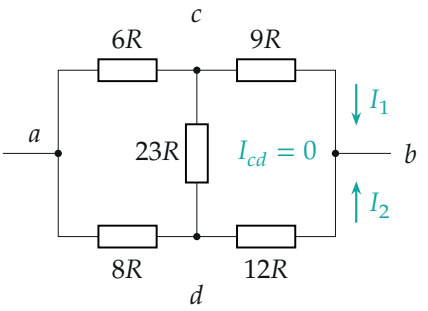
Сопротивление участка цепи

Задача 3. [Курчатов 2014/15, 8 класс, задача 3] Найдите сопротивление участка цепи, схема которого показана на рисунке, если $R = 7$ Ом.



▲ **Решение. Что происходит.** Это мостовая схема: две ветви между входом и выходом, а их средние точки соединены перемычкой $23R$. Если потенциалы средних точек равны, ток по перемычке не идёт (закон Ома: $I = \Delta\varphi/R$), и её можно выбросить — мост «уравновешен». Проверяем это условие, а затем считаем две параллельные ветви.

Обозначения. a и b — вход и выход участка; c — средняя точка верхней ветви (между $6R$ и $9R$), d — нижней (между $8R$ и $12R$); U — напряжение между a и b, $\varphi_a = U$, $\varphi_b = 0$ (рисунок 2).



Обозначения узлов и токов в ветвях.

1. Потенциалы средних точек при условии, что ток по перемычке не идёт. Предположим, что ток через $23R$ равен нулю, и проверим, что

это не противоречит закону Ома. Тогда через $6R$ и $9R$ течёт один и тот же ток I_1, и напряжение U делится пропорционально сопротивлениям:

$$U_{ac} = U \cdot \frac{6R}{6R + 9R} = \frac{2}{5}U, \qquad \varphi_c = U - \frac{2}{5}U = \frac{3}{5}U.$$

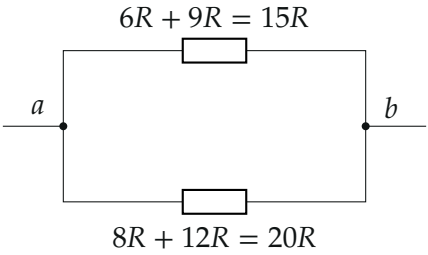
Так же для нижней ветви (ток I_2 через $8R$ и $12R$):

$$U_{ad} = U \cdot \frac{8R}{8R + 12R} = \frac{2}{5}U, \qquad \varphi_d = \frac{3}{5}U.$$

2. Мост уравновешен. Получилось $\varphi_c = \varphi_d$, поэтому по закону Ома ток через перемычку $I_{cd} = (\varphi_c - \varphi_d)/(23R) = 0$ — предположение согласуется. Короче то же условие записывается равенством отношений

$$\frac{6R}{9R} = \frac{8R}{12R} = \frac{2}{3}.$$

Перемычку, по которой ток не идёт, можно убрать — токи и напряжения не изменятся (рисунок 3).



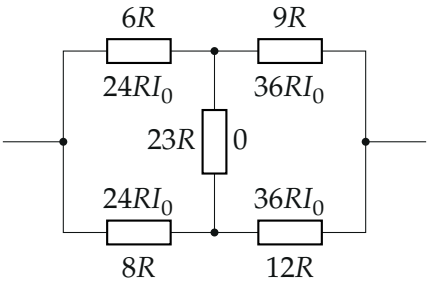
Эквивалентная схема без перемычки: две ветви соединены параллельно.

3. Сопротивление участка. В каждой ветви резисторы соединены последовательно: $15R$ и $20R$. Ветви соединены параллельно, проводимости складываются:

$$\frac{1}{R_{\text{уч}}} = \frac{1}{15R} + \frac{1}{20R} = \frac{4+3}{60R} = \frac{7}{60R},$$

$$R_{\text{уч}} = \frac{60}{7}R = \frac{60}{7} \cdot 7\ \text{Ом} = 60\ \text{Ом}.$$

4. Второй способ — токи и напряжения. Пусть $U = 60R{\cdot}I_0$ при некотором токе I_0. Токи в ветвях: $I_1 = U/(15R) = 4I_0$, $I_2 = U/(20R) = 3I_0$, общий ток $7I_0$. Сопротивление $U/(7I_0) = \frac{60}{7}R$. Распределение напряжений на всех пяти резисторах — на рисунке 4.



Напряжения на резисторах при общем напряжении $60RI_0$: в верхней и нижней ветвях они одинаковы, на перемычке — ноль.

Обратите внимание. Сопротивление $23R$ в ответ не входит вовсе: в уравновешенном мосте перемычку можно заменить и обрывом, и проводом — результат один. Проверка проводом: $6R \parallel 8R = \frac{24}{7}R$, $9R \parallel 12R = \frac{36}{7}R$, сумма $\frac{60}{7}R$ — то же.

Ответ:

$$R_{\text{уч}} = \frac{(6R + 9R)(8R + 12R)}{6R + 9R + 8R + 12R} = \frac{60}{7}R = 60\ \text{Ом}.$$

Проверка. Размерность — омы. Параллельное соединение меньше меньшей ветви: $60\ \text{Ом} < 15R = 105\ \text{Ом}$. Замена перемычки проводом (см. «Обратите внимание») даёт тот же результат — второй независимый способ.

Ответ. $R_{\text{уч}} = \frac{60}{7}R = 60\ \text{Ом}$.