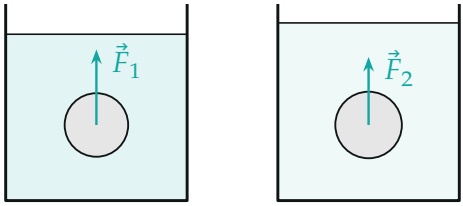
Расширение жидкости и стеклянного шарика

Задача 5. [Курчатов 2014/15, 8 класс, задача 5] При нагревании или охлаждении твёрдые тела, как известно, изменяют свой объём. Коэффициентом объёмного расширения β называется коэффициент пропорциональности между относительным изменением объёма $\dfrac{\Delta V}{V}$ тела и изменением температуры этого тела Δt, то есть $\dfrac{\Delta V}{V} = \beta\,\Delta t$.

Стеклянный шарик с коэффициентом объёмного расширения β_1 полностью погружают в жидкость сначала при температуре t_1, а затем — при температуре t_2. Модули сил Архимеда, действующих на шарик в этих случаях, равны, соответственно, F_1 и F_2. Определите коэффициент объёмного расширения жидкости β_2.



Поясняющий рисунок: при нагревании шарик и жидкость расширяются, жидкость становится менее плотной; сила Архимеда меняется.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Архимеда и тепловое расширение. Сила Архимеда равна весу вытесненной жидкости: $F = \rho g V$, где ρ — плотность жидкости, V — объём шарика. При смене температуры меняются оба множителя: шарик расширяется (коэффициент β_1), а плотность жидкости падает, потому что та же масса жидкости занимает больший объём (коэффициент β_2). Отношение сил связывает β_1 и β_2.

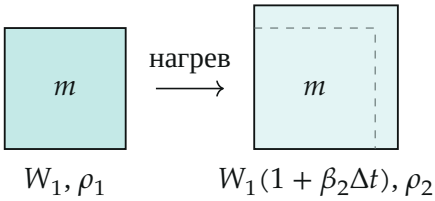
Обозначения. $\Delta t = t_2 - t_1$; V_1, V_2 — объёмы шарика при t_1 и t_2; ρ_1, ρ_2 — плотности жидкости при t_1 и t_2. Изменение объёма отсчитываем от состояния при t_1, как в определении β.

1. Объём шарика. По определению коэффициента объёмного расширения $\Delta V = \beta_1 V_1 \Delta t$:

$$V_2 = V_1 + \beta_1 V_1 \Delta t = V_1(1 + \beta_1 \Delta t).$$

2. Плотность жидкости. Возьмём порцию жидкости массы m; при t_1 она занимает объём $W_1 = m/\rho_1$, при t_2 — объём $W_2 = W_1(1 + \beta_2 \Delta t)$ (рисунок 2). Масса не меняется, поэтому

$$\rho_2 = \frac{m}{W_2} = \frac{m}{W_1(1 + \beta_2 \Delta t)} = \frac{\rho_1}{1 + \beta_2 \Delta t}.$$



Порция жидкости массы m: объём растёт в $1 + \beta_2 \Delta t$ раз, плотность во столько же раз падает. Пунктир — прежний объём.

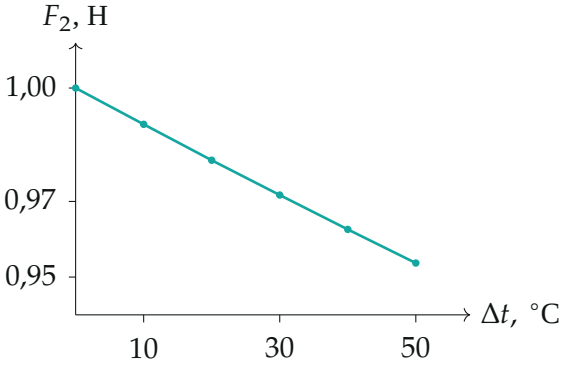
3. Отношение сил Архимеда. Закон Архимеда для полностью погружённого шарика: $F_1 = \rho_1 g V_1$, $F_2 = \rho_2 g V_2$. Делим:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + \beta_1 \Delta t}{1 + \beta_2 \Delta t}.$$

4. Выражаем β_2.

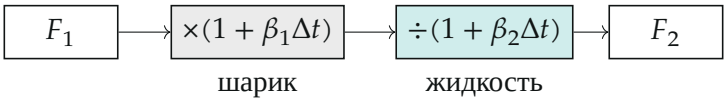
$$1 + \beta_2 \Delta t = \frac{F_1}{F_2}(1 + \beta_1 \Delta t) \quad \Longrightarrow \quad \beta_2 = \frac{1}{t_2 - t_1}\left(\frac{F_1}{F_2} - 1\right) + \frac{F_1}{F_2}\beta_1.$$

5. Численная проверка. Возьмём стекло $\beta_1 = 2{,}7 \cdot 10^{-5}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$ и жидкость с $\beta_2 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$ (близко к керосину), $F_1 = 1$ Н. По формуле шага 3 при $\Delta t = 50\ ^\circ$C получаем $F_2 = 0{,}9537$ Н; подставив F_1, F_2 в ответ, возвращаем $\beta_2 = 1{,}000 \cdot 10^{-3}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$. Как меняется сила с температурой — на рисунке 3.



Сила Архимеда при $\beta_1 = 2{,}7\cdot10^{-5}$, $\beta_2 = 1{,}0\cdot10^{-3}\ °C^{-1}$, $F_1 = 1$ Н: жидкость расширяется сильнее стекла, и сила убывает.

6. Наглядно: два множителя. Множитель от шарика $1 + \beta_1\Delta t$ увеличивает силу, множитель от жидкости $1/(1 + \beta_2\Delta t)$ уменьшает (рисунок 4). Сила уменьшается ($F_2 < F_1$ при нагревании), если жидкость расширяется сильнее шарика: $\beta_2 > \beta_1$.



Путь от F_1 к F_2: объём шарика растёт, плотность жидкости падает.

Обратите внимание. Плотность жидкости при нагревании *уменьшается*, поэтому β_2 стоит в знаменателе отношения сил. Расширение шарика тоже нельзя забывать: без него получилось бы $\beta_2 = \frac{1}{\Delta t}(\frac{F_1}{F_2} - 1)$ — заниженное значение.

Ответ:

$$\beta_2 = \frac{1}{t_2 - t_1}\left(\frac{F_1}{F_2} - 1\right) + \frac{F_1}{F_2}\beta_1.$$

При малых $\beta\Delta t$ (обычный случай) $F_1/F_2 \approx 1$ во втором слагаемом, и $\beta_2 \approx \beta_1 + \dfrac{F_1 - F_2}{F_2\,(t_2 - t_1)}$.

Проверка. Размерность: оба слагаемых — $°C^{-1}$. Частный случай: если $\beta_2 = \beta_1$, шарик и жидкость расширяются одинаково, и сила не ме-

няется; подставив $F_1 = F_2$, получаем $\beta_2 = \beta_1$ — верно. Численная проверка (шаг 5) возвращает заданное β_2.

Ответ. $\beta_2 = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\left(\dfrac{F_1}{F_2} - 1\right) + \dfrac{F_1}{F_2}\beta_1$.