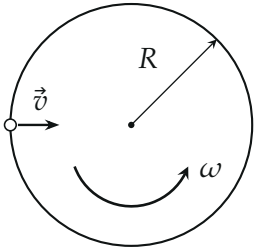
Шарик и вращающийся цилиндр

Задача 1. [Курчатов 2014/15, 9 класс, задача 1] Маленький шарик влетает со скоростью v в малое отверстие в стенке полого цилиндра, вращающегося вокруг своей оси (см. рис.). Радиус R цилиндра много больше толщины его стенок. Скорость шарика перпендикулярна оси цилиндра. Какой должна быть угловая скорость вращения цилиндра ω для того, чтобы шарик вылетел наружу, не испытав соударений? Силу тяжести не учитывайте.

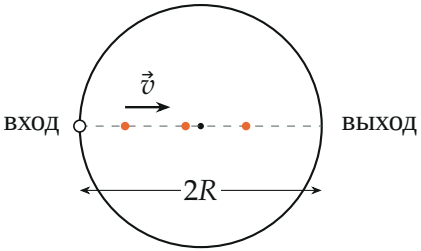


▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на кинематику прямолинейного движения и вращения. Сила тяжести не учитывается, внутри цилиндра на шарик ничего не действует, поэтому он летит по прямой с постоянной скоростью — по диаметру, ведь скорость направлена через ось (перпендикулярна оси и входит через отверстие к центру). Отверстие одно, значит, выйти шарик может только через него же. К моменту, когда шарик долетит до противоположной стенки, отверстие должно оказаться именно там.

Обозначения. t — время пролёта шарика внутри цилиндра; φ — угол, на который за это время повернётся цилиндр; n — число целых оборотов, $n = 0, 1, 2, \ldots$

1. Время пролёта. Шарик проходит диаметр $2R$ равномерно (рисунок 2; толщиной стенки пренебрегаем):

$$t = \frac{2R}{v}.$$



Внутри цилиндра сил нет: шарик летит по диаметру равномерно и подлетает к стенке в диаметрально противоположной точке.

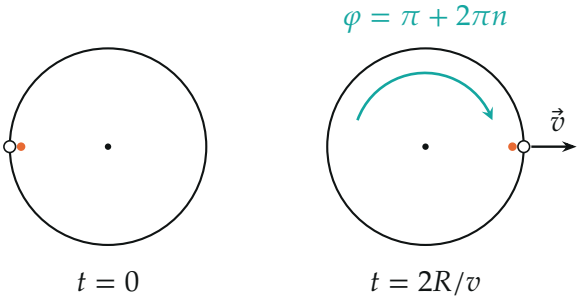
2. Условие вылета. За время t отверстие должно переместиться из точки входа в диаметрально противоположную точку. Для этого цилиндр поворачивается на пол-оборота плюс любое целое число полных оборотов (рисунок 3):

$$\varphi = \pi + 2\pi n = \pi(2n+1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

При равномерном вращении $\varphi = \omega t$, отсюда

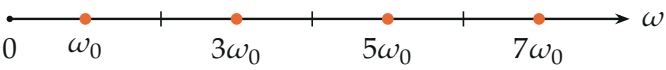
$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{\pi(2n+1)\,v}{2R}.$$

Направление вращения не важно: поворот на π в любую сторону приводит отверстие в одну и ту же точку.



В момент влёта отверстие слева; к моменту подлёта к правой стенке цилиндр повернулся на π (плюс целые обороты), и отверстие справа.

3. Набор допустимых скоростей. Допустимые угловые скорости образуют ряд нечётных кратных $\omega_0 = \frac{\pi v}{2R}$ (рисунок 4): ω_0, $3\omega_0$, $5\omega_0$, … Наименьшая — когда цилиндр успевает сделать ровно пол-оборота.



Допустимые угловые скорости, $\omega_0 = \pi v/(2R)$: только нечётные кратные. При чётных кратных отверстие к моменту подлёта возвращается на место входа.

Обратите внимание. Ответ — не одно число, а целая серия: цилиндр может успеть сделать любое целое число оборотов сверх половины. И отверстие должно быть напротив входа, а не на месте входа: при $\varphi = 2\pi n$ шарик ударится о стенку.

Ответ:

$$\omega = \frac{\pi(2n+1)\,v}{2R}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Проверка. Размерность: (м/с)/м = 1/с. Смысл: при $n = 0$ период вращения $T = 2\pi/\omega = 4R/v$ — ровно вдвое больше времени пролёта, цилиндр делает пол-оборота, пока шарик летит поперёк него.

Ответ. $\omega = \frac{\pi(2n+1)\,v}{2R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (направление вращения любое).