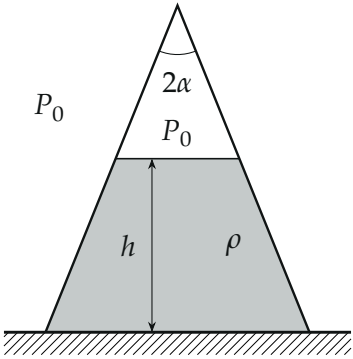
Призма с водой, вытекающей из-под неё

Задача 2. [Курчатов 2014/15, 9 класс, задача 2] Полая прямая призма, сделанная из тонкого прочного листового материала, имеет высоту L, а её основания представляют собой равнобедренные треугольники с углом 2α между боковыми сторонами. У призмы аккуратно удалили боковую грань, лежащую напротив угла 2α, и поставили призму на гладкий стол так, что упомянутый угол оказался сверху (основание призмы лежит в плоскости рисунка, её высота перпендикулярна плоскости рисунка). Вблизи оказавшегося сверху угла проделали маленькое отверстие и начали медленно заливать через него внутрь призмы воду плотностью ρ. В момент, когда уровень воды в призме достиг высоты h, вода начала вытекать из-под призмы. Найдите массу m призмы с удалённой гранью, считая, что давление P_0 воздуха над водой в призме и снаружи одинаково и равно атмосферному.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатику и равновесие тела. Призма стоит на столе открытым низом, вода давит на её наклонные стенки изнутри, и сила давления направлена по нормали к стенке — наружу и немного вверх. Чем выше уровень, тем больше вертикальная составляющая этих сил. Когда она сравняется с силой тяжести призмы, призма перестанет давить на стол, приподнимется, и вода начнёт вытекать из-под неё. Атмосферное давление действует на стенки и изнутри, и снаружи одинаково и сокращается, поэтому считаем только гидростатическое давление $\rho g x$.

Обозначения. x — глубина точки стенки под поверхностью воды ($0 \le x \le h$); Δx — высота малого участка стенки; ΔF — сила давления воды на этот участок; ΔF_y — её вертикальная составляющая; F_y — вертикальная сила на одну стенку; ось y — вертикально вверх.

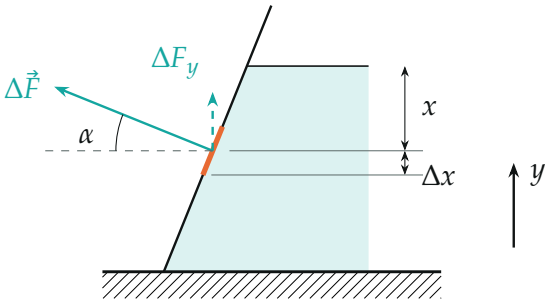
1. Сила давления на малый участок стенки. Стенка наклонена к вертикали на угол α. Полоска стенки высотой Δx и длиной L имеет ширину вдоль стенки $\Delta x / \cos\alpha$ (рисунок 2), давление на ней $\rho g x$ (избыток над атмосферным):

$$\Delta F = \rho g x \cdot L \frac{\Delta x}{\cos\alpha}.$$

Сила направлена по нормали к стенке, а нормаль наклонена к горизонтали на угол α. Проекция на ось y:

$$\Delta F_y = \Delta F \sin\alpha = \rho g x L \, \Delta x \operatorname{tg}\alpha.$$

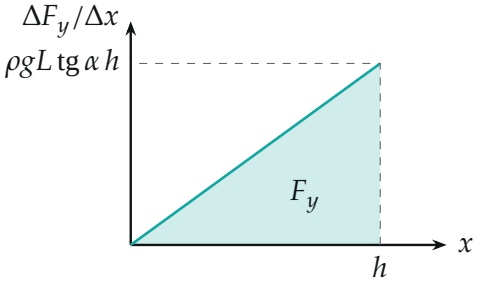
Знак плюс — составляющая направлена вверх: вода «подпирает» стенку, наклонённую над ней.



Левая стенка: на полоску высотой Δx на глубине x вода давит по нормали; нормаль наклонена к горизонтали на α.

2. Сумма по всей стенке. $\Delta F_y / \Delta x = \rho g L \operatorname{tg}\alpha \cdot x$ — линейная функция глубины. Сумма ΔF_y по всем полоскам от $x = 0$ до $x = h$ равна площади треугольника под этим графиком (рисунок 3):

$$F_y = \frac{1}{2} h \cdot \rho g L \operatorname{tg}\alpha \cdot h = \frac{\rho g L h^2 \operatorname{tg}\alpha}{2}.$$



Вертикальная сила на одну стенку — площадь треугольника под линейным графиком.

3. Условие начала вытекания. Пока призма давит на стол, на неё действуют сила тяжести mg, вертикальные силы F_y от двух стенок и сила реакции стола N. Второй закон Ньютона для покоящейся призмы в проекции на ось y:

$$N + 2F_y - mg = 0.$$

Вода начинает вытекать, когда призма перестаёт прижиматься к столу: $N = 0$. Отсюда

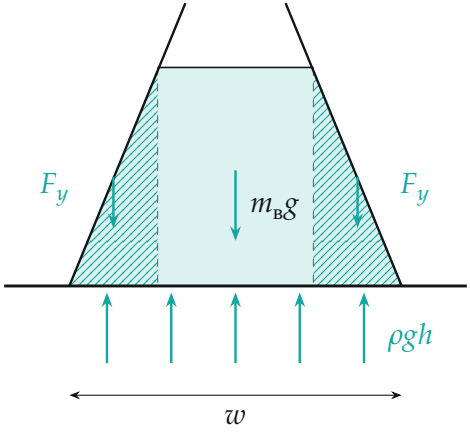
$$mg = 2F_y = \rho g L h^2 \operatorname{tg}\alpha \quad \Longrightarrow \quad m = \rho L h^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

Торцевые грани (треугольники) вертикальны, давление на них горизонтально и в вертикальное равновесие не входит.

4. Второй способ — равновесие воды. Рассмотрим саму воду (рисунок 4). Ширина воды у стола w, на высоте h — $w - 2h\operatorname{tg}\alpha$; сечение — трапеция площадью $h\,(w - h\operatorname{tg}\alpha)$. Снизу стол давит на воду с избыточным давлением $\rho g h$ по всей ширине w, сверху и с боков — стенки с суммарной вертикальной силой $2F_y$ вниз. Равновесие воды по вертикали:

$$\rho g h\, wL - \rho g L\, h\,(w - h\operatorname{tg}\alpha) - 2F_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2F_y = \rho g L h^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

Тот же результат: вертикальная сила на стенки равна весу воды, которая заполнила бы два треугольника между стенками и вертикалями (на рисунке 4 — штриховка), и не зависит от ширины w.



Силы на воду: стол снизу, стенки (вниз по F_y), сила тяжести воды $m_в g$. Разница — вес штрихованных треугольников.

Обратите внимание. Сила давления на наклонную стенку перпендикулярна стенке, а не горизонтальна: именно её вертикальная составляющая и поднимает призму. И атмосферное давление в ответ не входит — оно действует на стенки с обеих сторон одинаково.

Ответ:

$$m = \rho L h^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Проверка. Размерность: (кг/м^3)·м·м^2 = кг. Пределы: $\alpha \to 0$ (стенки вертикальны) — $m \to 0$, вертикальной силы нет, и вода не поднимет призму с вертикальными стенками ни при каком уровне; согласуется и второй способ: масса воды в штрихованных треугольниках $\rho L \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} h \cdot h \operatorname{tg} \alpha$ при $\alpha \to 0$ исчезает.

Ответ. $m = \rho L h^2 \operatorname{tg} \alpha$.