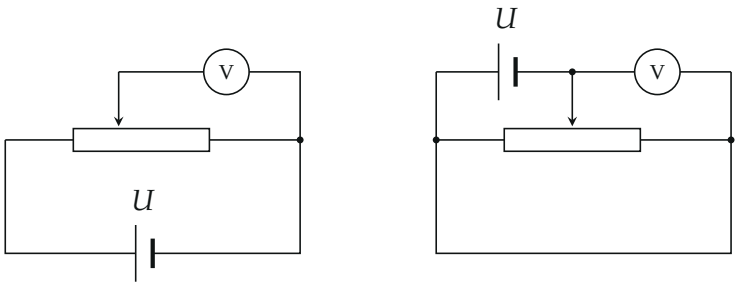
Реостат и вольтметр в двух схемах

Задача 4. [Курчатов 2014/15, 9 класс, задача 4] Из источника постоянного напряжения, реостата и вольтметра (все приборы идеальные) собрана цепь, схема которой изображена на рисунке слева. Вольтметр показывает напряжение $V_1 = 3$ В. Затем, не меняя положения движка реостата, источник подключают по-другому (рис. справа). При этом вольтметр показывает напряжение $V_2 = 15$ В, и на реостате выделяется мощность $P = 5$ Вт. Чему равно полное сопротивление реостата?



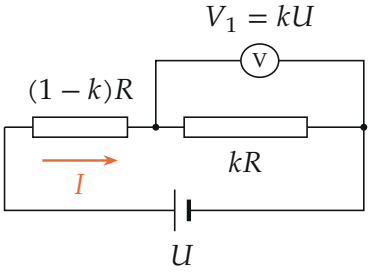
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Ома и соединения проводников. Движок делит реостат на две части. В первой схеме реостат целиком подключён к источнику и работает как делитель напряжения: вольтметр показывает напряжение на одной части. Во второй схеме концы реостата соединены друг с другом проводами, источник включён между движком и этими концами — обе части оказываются параллельно, и на каждой полное напряжение источника. Вольтметр идеальный (ток через него не идёт), источник — идеальный (напряжение U не зависит от нагрузки).

Обозначения. R — полное сопротивление реостата; kR — сопротивление части, к которой в первой схеме подключён вольтметр, $(1-k)R$ — другой части ($0 < k < 1$); U — напряжение источника; I — ток в первой схеме; I_1, I_2 — токи через части во второй схеме.

1. Первая схема — делитель. Ток через вольтметр не идёт, поэтому обе части реостата соединены последовательно и подключены к источ-

нику (рисунок 2). Закон Ома для всего реостата и для его части:

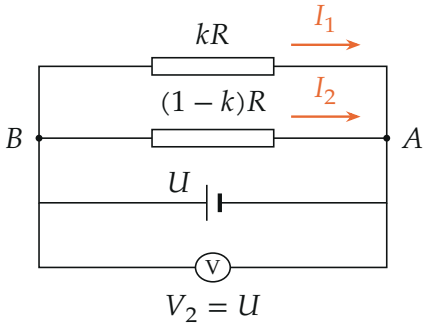
$$I = \frac{U}{R}, \qquad V_1 = I \cdot kR = kU.$$



Первая схема, перерисованная: две части реостата последовательно, вольтметр — на части kR.

2. Вторая схема — параллельное соединение. Нижний провод соединяет оба конца реостата в узел A, движок — узел B; источник и вольтметр включены между B и A (рисунок 3). Вольтметр показывает напряжение источника, и каждая часть реостата под этим напряжением:

$$U = V_2 = 15\ \text{В}, \qquad k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{15} = 0{,}2.$$



Вторая схема: обе части реостата, источник и вольтметр — между узлами B и A.

3. Мощность на реостате. Мощность на каждой части U^2/R_i, суммарная:

$$P = \frac{U^2}{kR} + \frac{U^2}{(1-k)R} = \frac{U^2}{R} \cdot \frac{1}{k(1-k)},$$

откуда

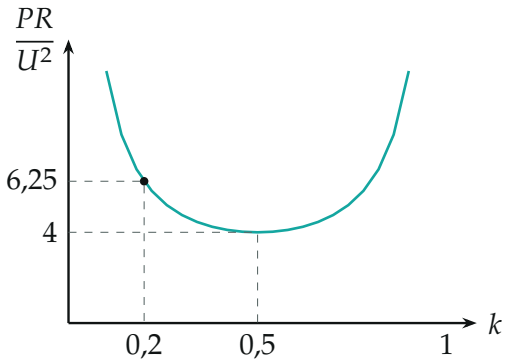
$$R = \frac{U^2}{P\,k(1-k)} = \frac{V_2^2}{P} \cdot \frac{1}{\frac{V_1}{V_2}\left(1-\frac{V_1}{V_2}\right)} = \frac{V_2^4}{P\,V_1(V_2-V_1)}.$$

Числа: $k(1-k) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$,

$$R = \frac{(15\text{ В})^2}{5\text{ Вт} \cdot 0{,}16} = \frac{225}{0{,}8}\text{ Ом} \approx 281\text{ Ом}.$$

Второй способ через токи: $I_1 = \frac{U}{kR} = 0{,}267$ А, $I_2 = \frac{U}{(1-k)R} = 0{,}067$ А, источник отдаёт $U(I_1+I_2) = 15 \cdot 0{,}333 = 5{,}0$ Вт — совпадает с P.

4. Как мощность зависит от положения движка. Множитель $\frac{1}{k(1-k)}$ наименьший (4) при движке посередине и растёт к краям (рисунок 4): короткий кусок реостата, подключённый к полному напряжению, греется сильно. В нашей задаче $k = 0{,}2$, множитель 6,25.



Мощность $PR/U^2 = 1/(k(1-k))$; точка — условие задачи.

Обратите внимание. Во второй схеме вольтметр подключён параллельно источнику, а не к части реостата: нижний провод замыкает кон-

цы реостата, и это главное в задаче. Какую из частей называть kR, а какую $(1-k)R$, не важно: ответ симметричен по $k \leftrightarrow 1-k$.

Ответ:

$$R = \frac{V_2^4}{P\,V_1(V_2 - V_1)} = \frac{15^4}{5 \cdot 3 \cdot 12}\ \text{Ом} \approx 281\ \text{Ом}.$$

Проверка. Размерность: $\text{В}^2/\text{Вт} = \text{Ом}$. Если бы движок стоял посередине ($V_1 = V_2/2$), сопротивление было бы $4U^2/P = 180$ Ом: при параллельном соединении половинок $R/4$ мощность $U^2/(R/4)$ — формула это даёт.

Ответ. $R = \dfrac{V_2^4}{P\,V_1(V_2 - V_1)} \approx 281$ Ом.