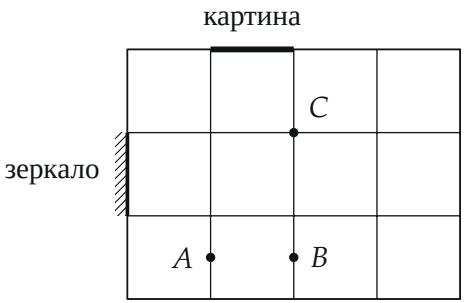
Картина и зеркало в комнате

Задача 5. [Курчатов 2014/15, 9 класс, задача 5] В прямоугольной комнате на одной из стен висит картина, а на другой — плоское зеркало (см. рис.). Из какой точки комнаты (A, B или C) можно полностью увидеть отражение картины в зеркале?



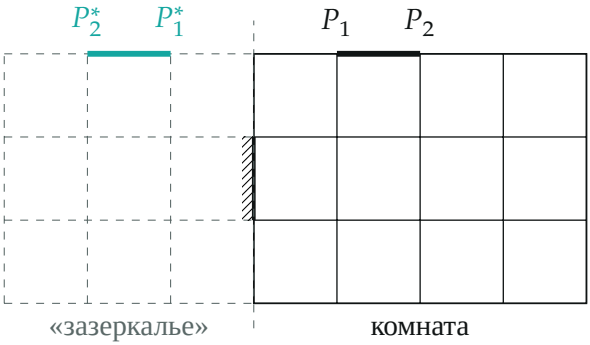
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение изображения в плоском зеркале. Отражение картины — её мнимое изображение, симметричное картине относительно плоскости зеркала. Глаз видит изображение точки, если прямая «глаз — изображение» проходит через само зеркало (а не через стену рядом с ним). Картина видна целиком, если так видны оба её края: изображения промежуточных точек лежат между изображениями краёв, и прямые к ним попадают на зеркало между прямыми к краям.

Обозначения. Сторона клетки — единица длины; начало координат — в левом нижнем углу комнаты, ось x вправо, ось y вверх. Зеркало — отрезок стены $x = 0$ от $y = 1$ до $y = 2$. Края картины: $P_1(1;\,3)$ и $P_2(2;\,3)$. Точки: $A(1;\,0{,}5)$, $B(2;\,0{,}5)$, $C(2;\,2)$.

1. Изображения краёв картины. Плоское зеркало даёт изображение, симметричное предмету относительно плоскости зеркала (закон отражения: угол падения равен углу отражения). Продолжим плоскость зеркала — прямую $x = 0$. Тогда

$$P_1^*(-1;\,3), \qquad P_2^*(-2;\,3).$$

Изображение картины — отрезок $P_1^*P_2^*$ «за стеной», в зазеркальной комнате (рисунок 2).



Изображение картины в плоскости зеркала: края P_1, P_2 переходят в P_1^*, P_2^*, симметричные относительно прямой $x = 0$.

2. Откуда виден каждый край. Изображение P^* видно из точки комнаты, если эта точка лежит в «окне» — между прямыми, проведёнными из P^* через концы зеркала $(0;\,1)$ и $(0;\,2)$.

Для $P_1^*(-1;\,3)$: прямая через $(0;\,2)$ — $y = 2 - x$, через $(0;\,1)$ — $y = 1 - 2x$. Область видимости:

$$1 - 2x \le y \le 2 - x.$$

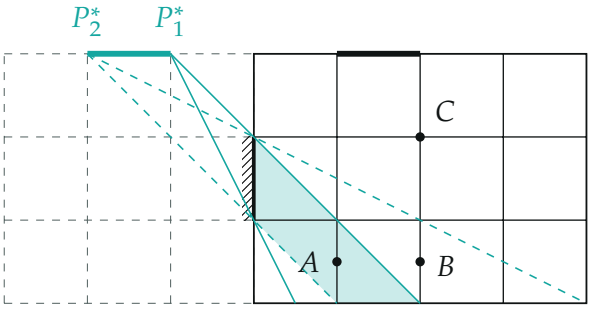
Для $P_2^*(-2;\,3)$: прямая через $(0;\,2)$ — $y = 2 - \dfrac{x}{2}$, через $(0;\,1)$ — $y = 1 - x$. Область видимости:

$$1 - x \le y \le 2 - \frac{x}{2}.$$

3. Где видна вся картина. Пересечение двух областей при $x > 0$: нижняя граница — большая из $1 - 2x$ и $1 - x$, то есть $1 - x$; верхняя — меньшая из $2 - x$ и $2 - x/2$, то есть $2 - x$:

$$1 - x \le y \le 2 - x \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \le x + y \le 2.$$

Это полоса между двумя диагоналями клеток (рисунок 3, закрашена).



Сплошные прямые — границы области, откуда виден край P_1^*; штриховые — откуда виден P_2^*. Закрашено пересечение: отсюда видна вся картина.

4. Проверяем точки. Подставляем координаты в $1 \le x + y \le 2$:

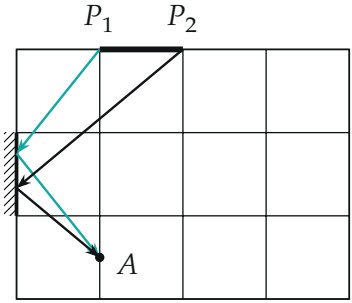
$$A:\ 1 + 0{,}5 = 1{,}5 \text{ — внутри полосы;}$$
$$B:\ 2 + 0{,}5 = 2{,}5 \text{ — вне;}$$
$$C:\ 2 + 2 = 4 \text{ — вне.}$$

Подробнее: из B виден край P_2^* ($1 - 2 \le 0{,}5 \le 2 - 1$), но не виден P_1^* ($0{,}5 > 2 - 2 = 0$) — видна только часть картины. Из C не виден ни один край: $2 > 2 - 2$ и $2 > 2 - 1$.

5. Ход лучей из точки A. Найдём точки зеркала, через которые идут лучи в глаз. Прямая AP_1^* пересекает $x = 0$ при

$$y = 0{,}5 + (3 - 0{,}5) \cdot \frac{1}{1+1} = 1{,}75,$$

прямая AP_2^* — при $y = 0{,}5 + 2{,}5 \cdot \dfrac{1}{1+2} \approx 1{,}33$. Обе точки на зеркале ($1 \le y \le 2$). Настоящий луч идёт от края картины к этой точке зеркала и, отразившись, в глаз (рисунок 4).



Лучи от краёв картины, отразившись от зеркала, попадают в точку A.

Обратите внимание. Важно не «видна ли картина вообще», а видны ли *оба* края. Из точки B отражение видно, но только частично — это ловушка задачи.

Ответ: только из точки A (из B — частично, из C — не видно).

Проверка. Второй способ — закон отражения для точки B: луч от P_1 в B должен отражаться от стены $x = 0$ в точке $y = 0{,}5 + 2{,}5 \cdot \frac{2}{3} \approx 2{,}17$ — выше верхнего края зеркала, там стена, отражения нет. Значит, левый край картины из B не виден, что совпадает с шагом 4.

Ответ. Только из точки A.