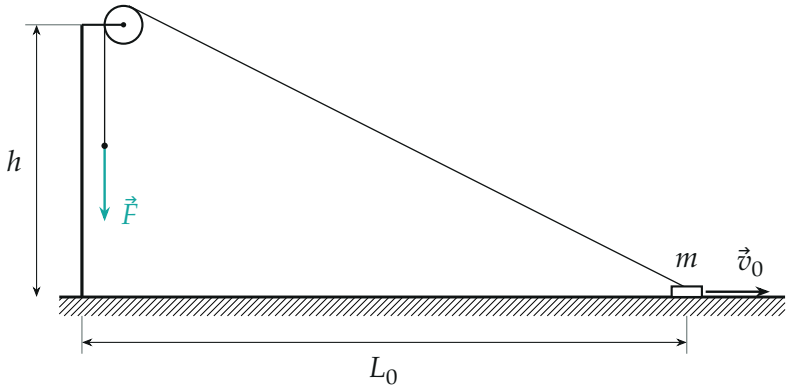
Брусок на нити через блок

Задача 1. [Курчатов 2015/16, 10 класс, задача 1] Маленький брусок массой m находится на гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии L_0 от вертикального столба, на котором на высоте h на коротком держателе закреплён маленький невесомый блок с неподвижной горизонтальной осью. Невесомая нерастяжимая длинная нить одним концом прикреплена к бруску, перекинута через блок и натянута с постоянной силой F. Трения в оси блока нет. В начальный момент брусок скользит по поверхности и имеет скорость v_0, направленную от столба. Каким будет расстояние L_1 от столба до бруска в тот момент, когда брусок на мгновение остановится?

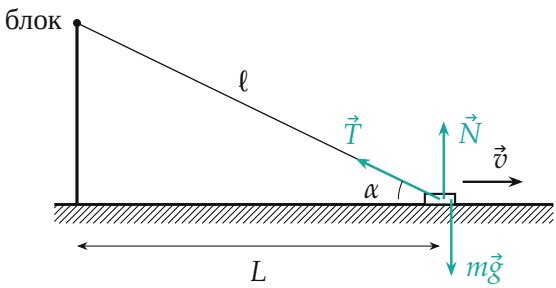


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на теорему о кинетической энергии. Нить натянута с постоянной по модулю силой F, а направлена всегда вдоль наклонного участка нити к блоку. Брусок уезжает от столба, наклонный участок удлиняется, и сила натяжения тормозит брусок. Считать силу по проекциям неудобно (угол меняется), зато её работа выражается через изменение длины наклонного участка нити — это и даёт ответ в одну строку.

Обозначения. L — текущее расстояние от столба до бруска; $\ell = \sqrt{L^2 + h^2}$ — длина наклонного участка нити от блока до бруска; ℓ_0, ℓ_1 — эта длина в начале и в момент остановки; $\vec{T}$ — сила

натяжения нити, действующая на брусок, $T = F$ (блок невесомый, трения в оси нет).

1. Силы, действующие на брусок. На брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции стола $\vec{N}$ и сила натяжения $\vec{T}$, направленная вдоль нити к блоку (рисунок 2). Стол гладкий, перемещение бруска горизонтальное, поэтому $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ работы не совершают. Работу совершает только $\vec{T}$.



Силы, действующие на брусок: работу совершает только натяжение нити $\vec{T}$.

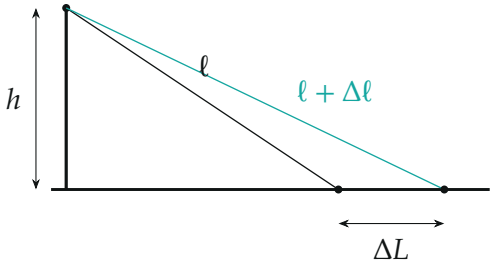
2. Работа силы натяжения. За малое перемещение ΔL бруска от столба работа силы $\vec{T}$ равна произведению модуля силы на проекцию перемещения на её направление:

$$\Delta A = -T\,\Delta L\cos\alpha,$$

знак минус — проекция перемещения на направление к блоку отрицательна. Но $\Delta L\cos\alpha$ — это ровно на сколько удлинился наклонный участок нити: $\Delta\ell = \Delta L\cos\alpha$ (рисунок 3, прямоугольный треугольник столб — нить — стол). Поэтому

$$\Delta A = -F\,\Delta\ell,$$

и при постоянном F работа на всём пути складывается в $A = -F(\ell_1 - \ell_0)$.



Брусок отъехал на ΔL — наклонный участок нити удлинился на $\Delta\ell = \Delta L\cos\alpha$.

Тот же результат с другой стороны: нить нерастяжима, поэтому, когда наклонный участок удлиняется на $\Delta\ell$, вертикальный конец нити за блоком поднимается на $\Delta\ell$ против силы F. Работа $-F\Delta\ell$ передаётся по нити бруску без потерь (блок невесомый, трения нет).

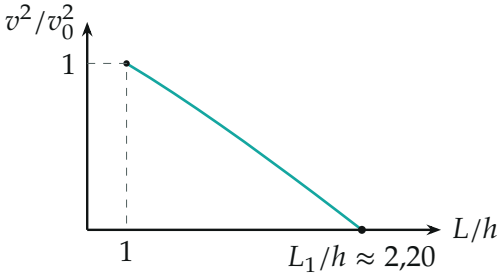
3. Теорема о кинетической энергии для бруска. Изменение кинетической энергии бруска от начала до остановки равно работе всех сил:

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = -F\,(\ell_1 - \ell_0) \quad\Longrightarrow\quad \ell_1 = \ell_0 + \frac{mv_0^2}{2F}.$$

Подставим $\ell = \sqrt{L^2 + h^2}$:

$$\sqrt{L_1^2 + h^2} = \sqrt{L_0^2 + h^2} + \frac{mv_0^2}{2F} \quad\Longrightarrow\quad L_1 = \sqrt{\left(\frac{mv_0^2}{2F} + \sqrt{L_0^2 + h^2}\right)^2 - h^2}.$$

4. Как брусок тормозит. По той же теореме для промежуточного положения $v^2(L) = v_0^2 - \frac{2F}{m}\left(\sqrt{L^2 + h^2} - \ell_0\right)$. Чем дальше брусок, тем ближе нить к горизонтали и тем сильнее тормозит, поэтому v^2 убывает почти линейно (рисунок 4, посчитано при $L_0 = h$, $mv_0^2/(2F) = h$).



Квадрат скорости бруска в зависимости от расстояния до столба (пример $L_0 = h$, $mv_0^2/2F = h$): $L_1 = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 - 1}\,h \approx 2{,}20\,h$.

Обратите внимание. Брусок остаётся на столе, только пока вертикальная составляющая силы натяжения меньше mg: $F\,h/\ell \le mg$. Самая большая она в начале (нить круче всего), так что условие нужно лишь при $\ell = \ell_0$; в задаче брусок по условию скользит по поверхности, значит, оно выполнено.

Ответ:

$$L_1 = \sqrt{\left(\frac{mv_0^2}{2F} + \sqrt{L_0^2 + h^2}\right)^2 - h^2}.$$

Проверка. Размерность: mv_0^2/F — (Дж)/(Н) = м, под корнем м^2. Предел $h \to 0$ (нить горизонтальна): $L_1 = L_0 + mv_0^2/(2F)$ — обычное торможение постоянной силой F на пути $v_0^2/(2a)$, $a = F/m$. Предел $v_0 \to 0$: $L_1 = L_0$.

Ответ. $L_1 = \sqrt{\left(\dfrac{mv_0^2}{2F} + \sqrt{L_0^2 + h^2}\right)^2 - h^2}$.