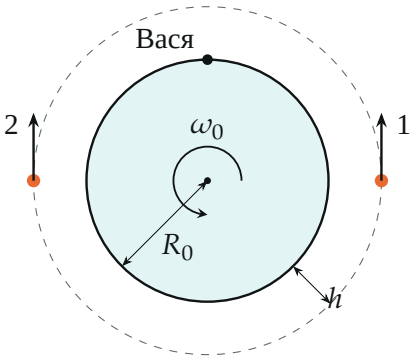
Два спутника над экватором

Задача 2. [Курчатов 2015/16, 10 класс, задача 2] Астроном-любитель Вася следит за движением двух искусственных спутников Земли, летающих на одной и той же высоте $h = 300$ км над экватором по круговым орбитам. Спутники пролетают точно над наблюдателем. Вася измеряет периоды движения этих спутников (промежутки времени между последовательными «пролётами» над ним). Оказалось, что эти периоды заметно отличаются. Какова разница этих периодов?

Модуль ускорения свободного падения у поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с^2, радиус Земли $R_0 = 6{,}4 \cdot 10^6$ м.



Поясняющий рисунок (вид с северного полюса, высота орбиты сильно увеличена): спутник 1 летит в сторону вращения Земли, спутник 2 — против.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение по окружности и переход во вращающуюся систему отсчёта. Орбиты обоих спутников одинаковые, значит, одинаковы и их угловые скорости в системе отсчёта, связанной с центром Земли и звёздами. Но Вася вращается вместе с Землёй. Если оба спутника пролетают точно над ним, они летят в плоскости экватора; разные наблюдаемые периоды получаются, только если они летят в разные стороны: один догоняет Васю, другой летит ему навстречу.

Обозначения. $r = R_0 + h$ — радиус орбиты; ω — угловая скорость спутника в «звёздной» системе; ω_0 — угловая скорость суточного вра-

щения Земли; T_1, T_2 — периоды, которые измеряет Вася; M — масса Земли, G — гравитационная постоянная.

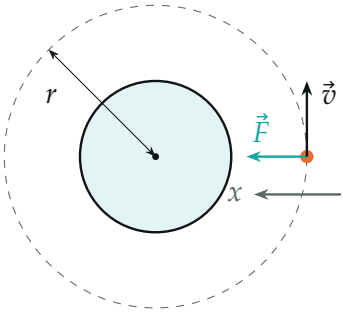
1. Угловая скорость спутника. На спутник действует только сила тяготения, направленная к центру Земли (рисунок 2). Второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную к центру:

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2}.$$

Массу Земли выразим через ускорение свободного падения у поверхности: $mg = \frac{GMm}{R_0^2}$, то есть $GM = gR_0^2$. Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{gR_0^2}{r^3}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot (6{,}4 \cdot 10^6)^2}{(6{,}7 \cdot 10^6)^3}}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 1{,}155 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

период обращения $2\pi/\omega = 5440$ с $\approx 90{,}6$ мин.



Спутник на орбите: сила тяготения $\vec{F}$ к центру сообщает ему центростремительное ускорение; ось x — к центру.

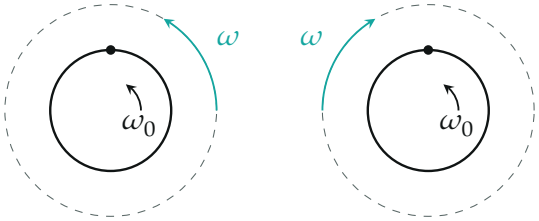
2. Угловая скорость Земли. За сутки Земля поворачивается на 2π:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600\ \text{с}} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}} \ll \omega.$$

3. Переход в систему отсчёта Васи. В системе, вращающейся вместе с Землёй, угловые скорости вычитаются: спутник 1, летящий по вращению Земли, «догоняет» Васю с угловой скоростью $\omega - \omega_0$, спутник 2,

летящий навстречу, — с угловой скоростью $\omega + \omega_0$ (рисунок 3). Между пролётами угол относительно Васи меняется на 2π:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega - \omega_0}, \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\omega + \omega_0}.$$



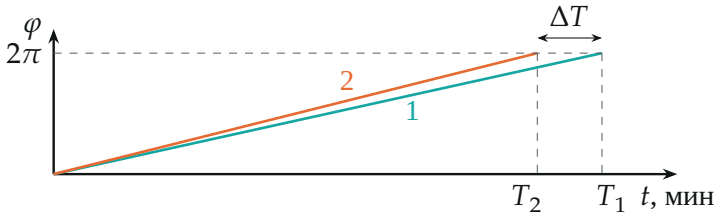
спутник 1: $\omega - \omega_0$ спутник 2: $\omega + \omega_0$

Относительно Васи (точка на экваторе) спутник 1 движется медленнее, спутник 2 — быстрее.

4. Разница периодов.

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{2\pi}{\omega - \omega_0} - \frac{2\pi}{\omega + \omega_0} = \frac{4\pi\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Числа: $T_1 = 96{,}7$ мин, $T_2 = 85{,}3$ мин, $\Delta T \approx 690$ с $\approx 11{,}5$ мин ≈ 12 мин. На рисунке 4 — угол спутника относительно Васи: пролёт над Васей — когда угол кратен 2π.



Угол спутника относительно Васи: спутник 2 возвращается через 85,3 мин, спутник 1 — через 96,7 мин.

Обратите внимание. Сутки (24 ч) — это период вращения Земли относительно Солнца; относительно звёзд Земля оборачивается за 23 ч 56 мин. С ним ΔT меняется лишь в третьем знаке (11,49 мин вместо 11,46 мин).

Ответ:

$$\Delta T = \frac{4\pi\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{gR_0^2}{(R_0+h)^3}}; \qquad \Delta T \approx 11{,}5 \text{ мин} \approx 12 \text{ мин}.$$

Проверка. Размерность: ω_0/ω^2 — с. Предел $\omega_0 \to 0$ (Земля не вращается): $\Delta T \to 0$, периоды совпадают, как и должно быть. Оценка: при $\omega_0 \ll \omega$ $\Delta T \approx 2T \cdot \frac{\omega_0}{\omega} = 2 \cdot 90{,}6 \text{ мин} \cdot \frac{90{,}6}{1436} \approx 11{,}4$ мин — то же.

Ответ. $\Delta T = \dfrac{4\pi\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \approx 11{,}5$ мин ≈ 12 мин, где $\omega = \sqrt{gR_0^2/(R_0+h)^3}$, $\omega_0 = 2\pi/(24 \text{ ч})$.