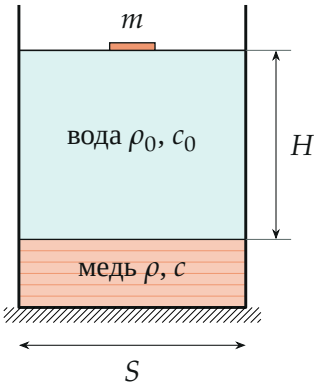
Монеты, падающие в воду

Задача 3. [Курчатов 2015/16, 10 класс, задача 3] У школьника Васи есть много одинаковых медных монет с температурой t_0 и теплоизолированный цилиндрический сосуд с водой, начальная температура которой тоже равна t_0. Вася по одной опускает монеты в воду, отпуская их без начальной скорости с высоты текущего уровня воды. Площадь дна сосуда S, начальный уровень воды H, масса одной монеты m, удельная теплоёмкость меди c, плотность меди равна ρ. Плотность и удельная теплоёмкость воды равны ρ_0 и c_0. До какой максимальной температуры можно нагреть воду таким способом? Сколько нужно бросить в воду монет, чтобы изменение её температуры было вдвое меньше максимально возможного? При решении задачи считайте, что монеты занимают весь объём ниже определённого уровня, то есть образуют на дне сплошной медный цилиндр (промежутки между монетами можно не учитывать). Теплоёмкостью сосуда можно пренебречь.



Поясняющий рисунок: монеты лежат на дне сплошным медным цилиндром, над ним — вода.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на закон сохранения энергии с переходом механической энергии в тепло и на уравнение теплового баланса. Монета тонет, её место занимает вода, которая поднимается; потенциальная энергия системы «монета + вода» уменьшается, и после

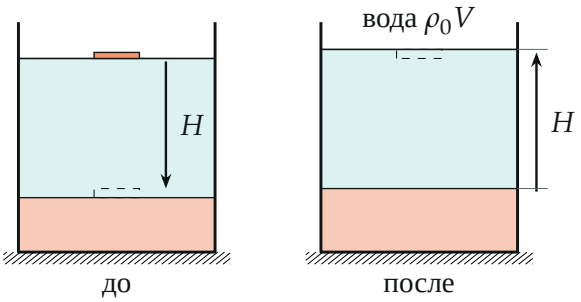
остановки движения вся эта убыль выделяется теплом в сосуде. Тепло каждой монеты одинаковое, а греть приходится всё больше меди — поэтому температура растёт всё медленнее и стремится к пределу.

Обозначения. $V = m/\rho$ — объём одной монеты; Q — тепло, выделившееся при падении одной монеты; N — число брошенных монет; Δt_N — изменение температуры после N монет; $C_0 = c_0\rho_0 SH$ — теплоёмкость воды.

1. Слой воды над монетами всегда равен H. Объём воды не меняется (SH), а монеты лежат под ней сплошным цилиндром. Значит, толщина слоя воды над медью всегда равна H: верх медного цилиндра поднимается вместе с уровнем воды. Каждая следующая монета отпускается с поверхности и ложится на медь, пройдя ровно H (рисунок 2).

2. Тепло от одной монеты. Сравним состояние до и после падения. Монета опустилась на H — её потенциальная энергия уменьшилась на mgH. Вода объёмом V, которая была на месте, где теперь лежит монета, в итоге оказалась наверху: столб воды тот же, а вода массой $\rho_0 V$ как бы переместилась вверх на H (рисунок 2), её потенциальная энергия выросла на $\rho_0 VgH$. В начале и в конце всё покоится, сосуд теплоизолирован, поэтому закон сохранения энергии даёт

$$Q = mgH - \rho_0 VgH = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) mgH.$$



Итог падения монеты: медь объёмом V опустилась на H, вода того же объёма поднялась на H.

3. Тепловой баланс после N монет. Монеты и вода всё время перемешиваются теплом, к концу у всех одна температура. Тепло NQ нагревает воду и все N монет на Δt_N:

$$NQ = (Ncm + C_0)\Delta t_N \quad \Longrightarrow \quad \Delta t_N = \frac{NQ}{Ncm + C_0} = \frac{Q}{cm} \cdot \frac{N}{N + C_0/(cm)}.$$

4. Максимальная температура. Множитель $\frac{N}{N+C_0/(cm)}$ растёт с N и стремится к единице (рисунок 3): каждая новая монета приносит тепло Q, но и добавляет теплоёмкость cm; в пределе её тепла хватает лишь на нагрев её самой, $Q = cm\,\Delta t$. Предел

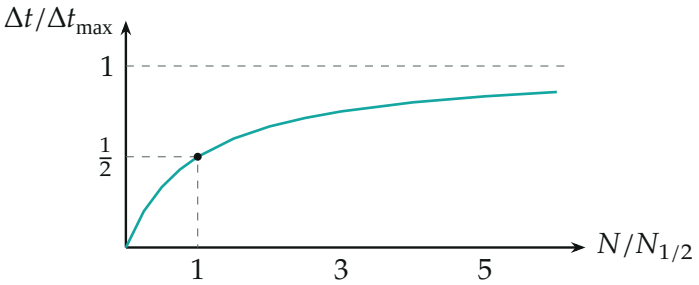
$$\Delta t_{\max} = \frac{Q}{cm} = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{gH}{c}, \qquad t_{\max} = t_0 + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{gH}{c}.$$

Достигается он только асимптотически, при очень большом числе монет.

5. Половина максимального нагрева. Условие $\Delta t_N = \frac{1}{2}\Delta t_{\max}$:

$$\frac{N}{N + C_0/(cm)} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{C_0}{cm} = \frac{c_0\rho_0 SH}{cm},$$

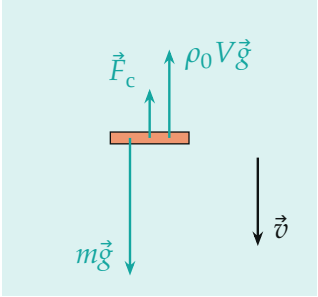
то есть теплоёмкость меди сравнялась с теплоёмкостью воды.



Нагрев воды в зависимости от числа монет, $N_{1/2} = c_0\rho_0 SH/(cm)$: график $x/(1+x)$ по точкам.

Обратите внимание. Считать тепло одной монеты как mgH нельзя: выталкиваемая вода поднимается, и на это уходит часть энергии — та же

сила Архимеда, которая уменьшает «вес» монеты в воде. Второй способ увидеть это: на монету при опускании действует сила тяжести минус сила Архимеда, $(m - \rho_0 V)\, g$, и работа этой силы на пути H даёт тот же ответ Q (рисунок 4; сила сопротивления воды как раз и переводит эту работу в тепло).



Монета тонет: сила тяжести, сила Архимеда и сила сопротивления воды $\vec{F}_c$.

Ответ:

$$t_{\max} = t_0 + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{gH}{c}; \qquad N = \frac{c_0\rho_0 SH}{cm}.$$

Проверка. Размерность: gH/c — (м^2/с^2)/(Дж/(кг·К)) = К. Предел $\rho \to \rho_0$ (монеты плотностью воды не тонут «с выигрышем»): $t_{\max} \to t_0$, тепла нет. Оценка: при $H = 0{,}1$ м и $c = 380$ Дж/(кг·К) $\Delta t_{\max} \approx 2 \cdot 10^{-3}$ К — способ «нагреть воду монетами» чисто учебный.

Ответ. $t_{\max} = t_0 + \left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho}\right)\dfrac{gH}{c}$ (достигается в пределе большого числа монет); $N = \dfrac{c_0\rho_0 SH}{cm}$.