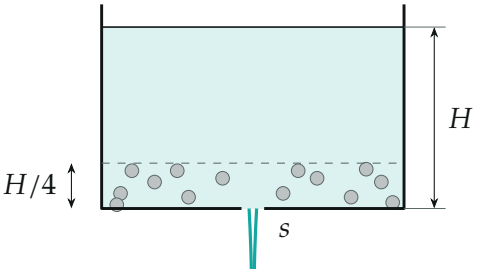
Опорожнение ванны с галькой

Задача 5. [Курчатов 2015/16, 10 класс, задача 5] Полностью заполненная водой ванна с вертикальными боковыми стенками освобождается от воды через открытое сливное отверстие в её горизонтальном дне за время τ. Отверстие расположено в середине дна, и его площадь во много раз меньше площади поперечного сечения ванны. При открытом сливном отверстии вода свободно (без труб) выливается на пол. Если в ванну сначала насыпать до краёв мелкую гальку, а затем заполнить ванну водой, то в этом случае ванна опорожняется за время $\tau/2$. При этом камешки гальки не закрывают сливного отверстия! Через какое время опорожнится ванна, если 75% гальки убрать (то есть оставшиеся камушки будут находиться в нижней четверти ванны) и снова заполнить её водой до краёв? Вязкостью воды можно пренебречь. При решении задачи считайте, что камешки гальки уменьшают площадь поперечного сечения ванны, доступную для воды.



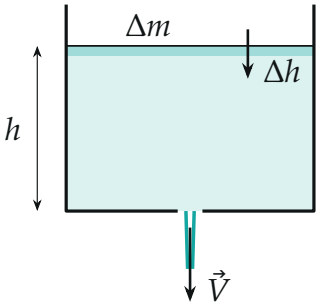
Поясняющий рисунок: третий опыт — галька только в нижней четверти ванны, s — площадь сливного отверстия.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на формулу Торричелли и сохранение объёма вытекающей воды. Скорость струи зависит только от высоты уровня над отверстием, а скорость опускания уровня — ещё и от площади зеркала воды. Галька не меняет напор, она только уменьшает площадь зеркала, и уровень в слое с галькой опускается быстрее. Поэтому ванну удобно разбить на два слоя: верхние три четверти без гальки и нижнюю четверть с галькой.

Обозначения. H — высота ванны; h — уровень воды над дном; S — площадь сечения ванны; s — площадь отверстия; βS — площадь сечения, доступная воде в слое с галькой ($0 < \beta < 1$); V — скорость струи.

1. Скорость струи — формула Торричелли. Вязкости нет, $s \ll S$, поэтому скорость опускания уровня мала по сравнению со скоростью струи. Закон сохранения механической энергии для порции воды массой Δm: сверху «исчезает» тонкий слой, а из отверстия на h ниже выходит столько же воды со скоростью V (рисунок 2):

$$\Delta m\, gh = \frac{\Delta m V^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad V = \sqrt{2gh}.$$



Слой Δm сверху «переходит» в струю у дна: энергия $\Delta m\, gh$ становится кинетической.

2. Скорость опускания уровня. Закон сохранения объёма (вода несжимаема): сколько ушло через отверстие за Δt, столько убыло в ванне. При площади зеркала A

$$A\,\Delta h = -sV\Delta t \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{s}{A}\sqrt{2gh}.$$

Перепишем через $\sqrt{h}$: $\Delta\sqrt{h} = \frac{\Delta h}{2\sqrt{h}}$, поэтому

$$\frac{\Delta\sqrt{h}}{\Delta t} = -\frac{s}{A}\sqrt{\frac{g}{2}} = \text{const},$$

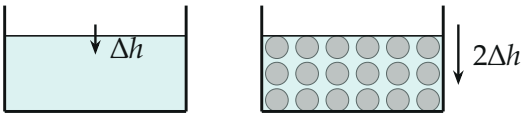
то есть $\sqrt{h}$ убывает равномерно. Время, за которое уровень опускается с h_1 до h_2:

$$t_{12} = \frac{A}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right).$$

3. Пустая ванна и ванна с галькой до краёв. Пустая ванна: $A = S$, от H до 0:

$$\tau = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Галька до краёв: $A = \beta S$ на всей высоте, время $\beta\tau = \tau/2$, значит, $\beta = \frac{1}{2}$. Уровень в слое с галькой при том же расходе опускается вдвое быстрее (рисунок 3).



площадь S доступно $\beta S = S/2$

Тот же объём воды $sV\Delta t$ уходит из слоя без гальки и из слоя с галькой: во втором уровень опускается вдвое больше.

4. Два слоя без гальки. По формуле шага 2 нижняя четверть (h от $H/4$ до 0) пустой ванны опорожняется за

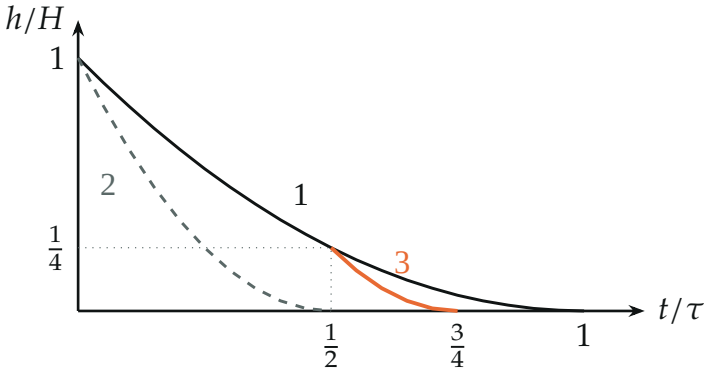
$$t_{\text{низ}} = \tau\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\tau}{2},$$

а верхние три четверти (h от H до $H/4$) — за $\tau - \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{2}$. Нижняя четверть идёт так же долго, как три верхних: напор у дна мал, струя медленная.

5. Третий опыт. Сверху гальки нет — верхние три четверти уходят, как в пустой ванне, за $\tau/2$; напор зависит только от h, а не от того, что лежит ниже. В нижней четверти площадь зеркала $\beta S = S/2$, время в два раза меньше: $\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{4}$. Итого

$$t = \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{4} = \frac{3\tau}{4}.$$

Графики уровня во всех трёх опытах (по формуле шага 2, $\sqrt{h}$ линейно по t) — на рисунке 4.



Уровень воды: 1 — без гальки, 2 — галька до краёв, 3 — галька в нижней четверти (до $t = \tau/2$ уровень идёт по кривой 1).

6. Второй способ — замена переменных. Уравнение шага 2 не меняется при замене $h' = 4h$, $t' = 2t$: $\frac{\Delta h'}{\Delta t'} = \frac{4}{2}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{s}{S}\cdot 2\sqrt{2gh} = -\frac{s}{S}\sqrt{2gh'}$. Значит, ванна с уровнем $H/4$ «в масштабе» совпадает с полной ванной, но время вдвое короче: $\tau/2$ — тот же результат шага 4.

Обратите внимание. Нельзя считать, что время пропорционально объёму воды: нижняя четверть вытекает столько же, сколько три верхние, потому что там мал напор. И галька в слое уменьшает время этого слоя, хотя напор не меняет: меньше воды на ту же высоту.

Ответ:

$$t = \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{4} = \frac{3\tau}{4}.$$

Проверка. Время лежит между $\tau/2$ (галька везде) и τ (гальки нет) — как и должно быть. Предел: если бы галька занимала долю α высоты снизу, то $t = \tau(1-\sqrt{\alpha}) + \beta\tau\sqrt{\alpha}$; при $\alpha = 1$ это $\tau/2$, при $\alpha = 0$ — τ, при $\alpha = \frac{1}{4}$ — $\frac{3\tau}{4}$.

Ответ. $t = \frac{3\tau}{4}$.