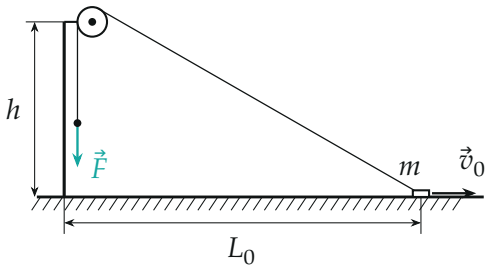
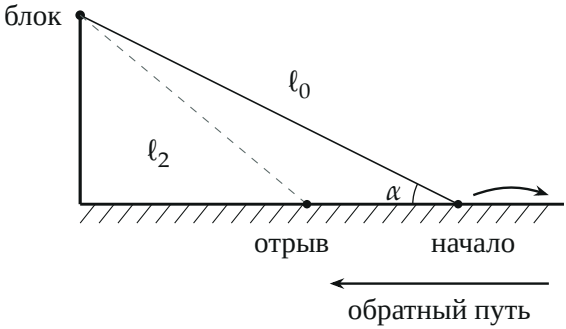
Брусок на нити: скорость отрыва

Задача 1. [Курчатов 2015/16, 11 класс, задача 1] Маленький брусок массой m находится на гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии L_0 от вертикального столба, на котором на высоте h на коротком держателе закреплён маленький невесомый блок с неподвижной горизонтальной осью. Лёгкая нерастяжимая длинная нить одним концом прикреплена к бруску, перекинута через блок и натянута с постоянной силой $F > mg$. Трения в оси блока нет. В начальный момент брусок скользит по поверхности и имеет скорость v_0, направленную от столба. Какой будет скорость бруска в тот момент, когда брусок перестанет давить на поверхность?



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на теорему об изменении кинетической энергии и условие отрыва от опоры. Нить тянет брусок к блоку с постоянной по модулю силой F. Её горизонтальная составляющая тормозит брусок, уходящий от столба, потом разгоняет его обратно. Вертикальная составляющая $F\sin\alpha$ растёт по мере приближения к столбу (угол α нити с горизонтом увеличивается). Пока $F\sin\alpha < mg$, брусок прижат к поверхности; отрыв — когда $F\sin\alpha$ сравняется с mg. Работа постоянной по модулю силы, направленной к неподвижной точке, равна F, умноженной на уменьшение расстояния до этой точки.

Обозначения. ℓ — длина участка нити от бруска до блока, $\ell = \sqrt{L^2 + h^2}$, где L — расстояние от бруска до столба; $\ell_0 = \sqrt{L_0^2 + h^2}$ — в начале; ℓ_2, L_2 — в момент отрыва; α — угол нити с горизонтом; N — сила реакции поверхности; v_2 — искомая скорость.

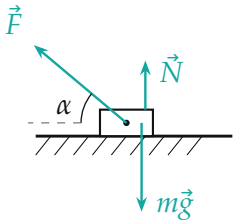


Брусок уходит от столба, останавливается и возвращается; отрыв — на обратном пути, когда нить станет достаточно крутой.

1. Где возможен отрыв. Пока брусок на поверхности, его ускорение горизонтально. Второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось (рисунок 3):

$$N + F\sin\alpha - mg = 0 \quad\Longrightarrow\quad N = mg - F\sin\alpha, \qquad \sin\alpha = \frac{h}{\ell}.$$

В начале брусок давит на поверхность ($N > 0$), то есть $Fh/\ell_0 < mg$. Пока брусок уходит от столба, ℓ растёт, $\sin\alpha$ уменьшается, и N только увеличивается — оторваться он не может. Горизонтальная составляющая $F\cos\alpha$ направлена к столбу и тормозит брусок; он останавливается и едет обратно. На обратном пути ℓ уменьшается, $\sin\alpha$ растёт, и при $F > mg$ условие $N = 0$ обязательно наступит раньше, чем брусок подъедет под блок (там $\sin\alpha = 1$ и $F\sin\alpha = F > mg$).



Силы, действующие на брусок на поверхности; в момент отрыва $N = 0$.

2. Условие отрыва. В момент, когда брусок перестаёт давить, $N = 0$, а ускорение ещё горизонтально (брусок только начинает отходить от поверхности):

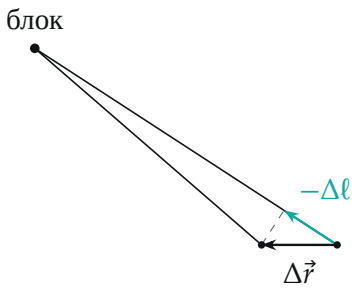
$$F\sin\alpha_2 = mg, \qquad \frac{Fh}{\ell_2} = mg \quad\Longrightarrow\quad \ell_2 = \sqrt{L_2^2 + h^2} = \frac{Fh}{mg}.$$

Так как $F > mg$, получаем $\ell_2 > h$ — такая точка на поверхности есть.

3. Работа силы натяжения. Блок идеальный, нить нерастяжимая, поэтому нить действует на брусок силой F, направленной вдоль нити к блоку. При малом смещении бруска $\Delta\vec{r}$ работа $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = -F\,\Delta\ell$: работает только составляющая смещения вдоль нити, а она равна изменению длины ℓ со знаком минус (рисунок 4). Модуль F постоянен, поэтому за всё движение

$$A_F = F\,(\ell_0 - \ell_2).$$

Сила тяжести и реакция $\vec{N}$ перпендикулярны горизонтальному перемещению и работы не совершают; поверхность гладкая.



Смещение $\Delta\vec{r}$ к столбу: его проекция на нить равна уменьшению длины нити $-\Delta\ell$.

4. Теорема об изменении кинетической энергии бруска. От начала до отрыва:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F\,(\ell_0 - \ell_2) = F\left(\sqrt{L_0^2 + h^2} - \frac{Fh}{mg}\right).$$

Отсюда

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2F}{m}\left(\sqrt{L_0^2 + h^2} - \frac{Fh}{mg}\right)}.$$

Подкоренное выражение положительно: в начале брусок давит на поверхность, $\ell_0 > Fh/(mg) = \ell_2$, работа силы F положительна.

5. Второй способ: работа через горизонтальную проекцию. Брусок смещается только по горизонтали, поэтому работает лишь проекция силы на ось x, направленную от столба: $F_x = -F\cos\alpha = -F\dfrac{L}{\sqrt{L^2+h^2}}$. Работа на малом смещении ΔL:

$$\Delta A = -F\frac{L\,\Delta L}{\sqrt{L^2+h^2}} = -F\,\Delta\left(\sqrt{L^2+h^2}\right),$$

так как $\Delta\sqrt{L^2+h^2} = \dfrac{L\,\Delta L}{\sqrt{L^2+h^2}}$. Сумма по всему пути (туда и обратно) — $F(\ell_0 - \ell_2)$, то же, что в п. 3.

Обратите внимание. Брусок движется сначала от столба, и в этот момент его скорость уменьшается, но в ответ это не входит: работа силы F на пути «туда и обратно до той же точки» равна нулю, важны только начальная и конечная длины нити.

Ответ:

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2F}{m}\left(\sqrt{L_0^2 + h^2} - \frac{Fh}{mg}\right)}.$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{F}{m}\cdot$ м — м^2/с^2, как и v_0^2. Предельный случай: если брусок стартует ровно в точке отрыва ($\ell_0 = Fh/mg$), то $v_2 = v_0$ — он возвращается в ту же точку с той же по модулю скоростью, верно для потенциальной силы. python: при $m = 1$, $F = 20$, $g = 10$, $h = 1$, $L_0 = 3$, $v_0 = 1$ численное интегрирование уравнений движения даёт в момент $N = 0$ скорость 6,891 м/с, формула — 6,891 м/с.

Ответ. $v_2 = \sqrt{v_0^2 + \dfrac{2F}{m}\left(\sqrt{L_0^2 + h^2} - \dfrac{Fh}{mg}\right)}$.