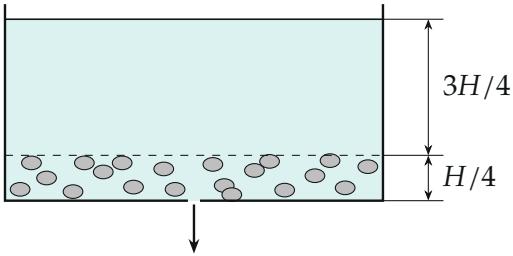
Опорожнение ванны с галькой

Задача 3. [Курчатов 2015/16, 11 класс, задача 3] Полностью заполненная водой ванна с вертикальными боковыми стенками освобождается от воды через открытое сливное отверстие в её горизонтальном дне за время τ. Отверстие расположено в середине дна, и его площадь во много раз меньше площади поперечного сечения ванны. При открытом сливном отверстии вода свободно (без труб) выливается на пол. Если в ванну сначала насыпать до краёв мелкую гальку, а затем заполнить ванну водой, то в этом случае ванна опорожняется за время $\tau/2$. При этом камешки гальки не закрывают сливного отверстия! Через какое время опорожнится ванна, если 75% гальки убрать (то есть оставшиеся камушки будут находиться в нижней четверти ванны) и снова заполнить её водой до краёв? Вязкостью воды можно пренебречь. При решении задачи считайте, что камешки гальки уменьшают площадь поперечного сечения ванны, доступную для воды.



Поясняющий рисунок: галька осталась в нижней четверти ванны, вода — до краёв.

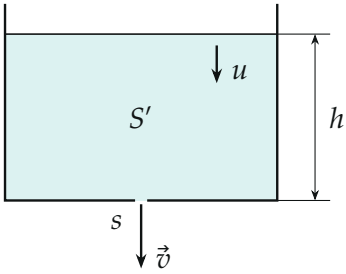
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на формулу Торричелли и опорожнение сосуда. Вода вытекает через малое отверстие со скоростью, зависящей от высоты уровня над ним. Скорость убывания уровня тем меньше, чем шире зеркало воды. Отсюда время опорожнения пропорционально площади зеркала и корню из начальной высоты. Галька только сужает площадь, доступную воде; полностью засыпанная ванна вытекает вдвое быстрее — значит, галька оставляет воде половину сечения.

Дальше время разбиваем на два этапа: верхние три четверти (без гальки) и нижняя четверть (с галькой).

Обозначения. H — высота ванны; h — высота уровня воды над дном; S — площадь сечения ванны; S' — площадь, доступная воде; s — площадь отверстия; v — скорость вытекания; $k = S'/S$ — доля сечения, доступная воде среди гальки.

1. Скорость вытекания: формула Торричелли. Отверстие малое ($s \ll S$), поэтому уровень опускается медленно и течение можно считать установившимся. Закон сохранения механической энергии (вязкости нет): тонкий слой массы Δm «уходит» с поверхности, где скорость практически нулевая, а через отверстие на h ниже выходит такая же масса со скоростью v (рисунок 2):

$$\Delta m\, gh = \frac{\Delta m\, v^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{2gh}.$$



Вода вытекает со скоростью v, уровень опускается со скоростью u.

2. Скорость опускания уровня. Вода несжимаема: за время Δt из отверстия выходит объём $sv\,\Delta t$, и на столько же уменьшается объём над ним, $S'\,|\Delta h|$:

$$u = -\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{s}{S'}\sqrt{2gh}.$$

3. Время опускания уровня с h_1 до h_2. Удобно следить за $\sqrt{h}$. Её

изменение $\Delta\sqrt{h} = \dfrac{\Delta h}{2\sqrt{h}}$, и из п. 2

$$\frac{\Delta\sqrt{h}}{\Delta t} = -\frac{s}{S'}\sqrt{\frac{g}{2}} = \text{const}.$$

Корень из высоты убывает равномерно, поэтому время опускания с h_1 до h_2 при постоянном сечении

$$t_{12} = \frac{S'}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}).$$

Для пустой ванны ($S' = S$, с H до 0): $\tau = \dfrac{S}{s}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$. График $h(t) = H(1 - t/\tau)^2$ — на рисунке 3.

4. Ванна, полная гальки: доля свободного сечения. Из п. 3 время опорожнения пропорционально S' при той же высоте H. По условию с галькой оно $\tau/2$, значит,

$$k = \frac{S'}{S} = \frac{1}{2}.$$

5. Ванна с галькой в нижней четверти. Верхний этап: уровень от H до $H/4$, сечение S:

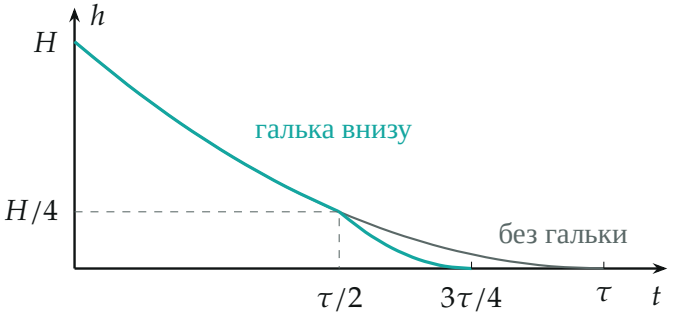
$$t_{\text{в}} = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{\frac{H}{4}}\right) = \tau\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\tau}{2}.$$

Нижний этап: уровень от $H/4$ до 0 среди гальки, сечение $S/2$:

$$t_{\text{н}} = \frac{S/2}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\frac{H}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\tau = \frac{\tau}{4}.$$

Всего

$$t = t_{\text{в}} + t_{\text{н}} = \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{4} = \frac{3\tau}{4}.$$



Уровень от времени (по точкам $h = H(1 - t/\tau)^2$): до $H/4$ кривые совпадают, ниже среди гальки уровень падает вдвое быстрее.

6. Второй способ: подобие (замена переменных). Для пустой ванны, налитой до $H/4$, введём $h' = 4h$, $t' = 2t$: уравнение п. 2 $\Delta h/\Delta t = -(s/S)\sqrt{2gh}$ переходит в то же уравнение для $h'(t')$ с $h'(0) = H$. Значит, четверть ванны вытекает за $\tau/2$ (а не за $\tau/4$, как было бы при постоянной скорости), верхние три четверти — тоже за $\tau/2$. С галькой сечение вдвое меньше, и последняя четверть вытекает за $\tau/4$ — тот же итог $3\tau/4$ (рисунок 4).

с галькой	верх, S: $\tau/2$	низ: $\tau/4$
без	верх, S: $\tau/2$	низ, S: $\tau/2$

Разбиение времени опорожнения на этапы; длины полос пропорциональны временам.

Обратите внимание. Нижняя четверть ванны вытекает не за четверть времени, а за половину: напор там мал, вода течёт медленно. Поэтому ответ не $\tau - \frac{1}{4}\cdot\frac{\tau}{2} = \frac{7\tau}{8}$, как дала бы линейная оценка.

Ответ: $t = \dfrac{3\tau}{4}$.

Проверка. Пределы: без гальки вовсе формула этапов даёт $\tau/2 + \tau/2 = \tau$, с галькой до краёв — $\frac{1}{2}(\tau/2 + \tau/2) = \tau/2$; оба совпадают с условием, а $3\tau/4$ лежит между ними. python (численное интегрирование со сменой S' на высоте $H/4$): $t/\tau = 0{,}7500$.

Ответ. $t = \dfrac{3\tau}{4}$.