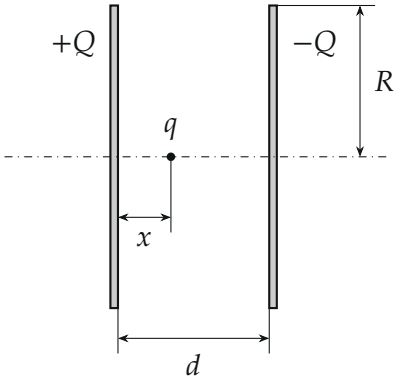
Энергия заряда в плоском конденсаторе

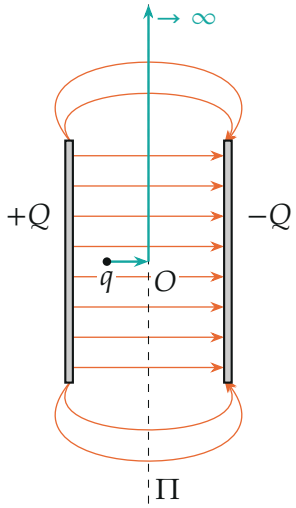
Задача 4. [Курчатов 2015/16, 11 класс, задача 4] Плоский воздушный конденсатор обладает одинаковыми круглыми обкладками радиусом R. По обкладкам распределены заряды $+Q$ и $-Q$, а расстояние между обкладками равно d ($d \ll R$). На оси симметрии конденсатора между пластинами на расстоянии x от обкладки с зарядом $+Q$ находится частица с зарядом q, ($|q| \ll |Q|$). Найдите потенциальную энергию взаимодействия этой частицы с конденсатором, считая, что потенциальная энергия равна нулю тогда, когда частица находится на бесконечно большом расстоянии от конденсатора.



Поясняющий рисунок: обкладки видны с ребра (масштаб по d увеличен), частица — на оси.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на потенциал электростатического поля. Потенциальная энергия частицы, равная нулю на бесконечности, — это работа поля при переносе частицы из её точки на бесконечность. Поле стационарное, работа не зависит от пути. Вне конденсатора поле не нуль (краевые линии), и посчитать работу «напрямую» вдоль оси трудно. Выберем путь, на котором поле работы не совершает почти везде: сначала по оси до средней плоскости, потом по средней плоскости на бесконечность. В средней плоскости поле по симметрии к ней перпендикулярно, и работа там нулевая.

Обозначения. Ось X — по оси конденсатора от обкладки $+Q$ к обкладке $-Q$, начало на обкладке $+Q$; O — центр конденсатора ($X = d/2$); Π — средняя плоскость $X = d/2$; E — модуль поля внутри; $S = \pi R^2$ — площадь обкладки; W — искомая потенциальная энергия; A — работа поля над частицей на выбранном пути.



Линии поля конденсатора (качественно, красные) и путь частицы на бесконечность (бирюзовый): по оси до центра O, затем по средней плоскости Π.

1. Энергия как работа поля. По определению потенциальной энергии с нулём на бесконечности

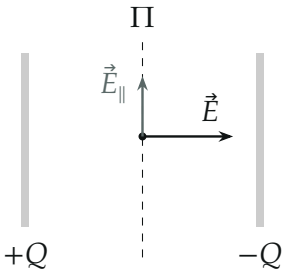
$$W = A_{\text{точка}\to\infty} = A_1 + A_2,$$

где A_1 — работа на отрезке оси от точки $X = x$ до центра O, A_2 — на луче по средней плоскости. Заряд $|q| \ll |Q|$ не перераспределяет заряды обкладок, поэтому поле конденсатора считаем заданным.

2. Поле в средней плоскости перпендикулярно ей: $A_2 = 0$**.** Отразим конденсатор зеркально относительно плоскости Π: обкладка $+Q$ встанет на место $-Q$ и наоборот. Получилась та же система с зарядами противоположного знака, значит, поле в каждой точке плоскости Π

при отражении должно смениться на противоположное. Составляющая поля вдоль П при отражении не меняется, поэтому она равна нулю; остаётся только составляющая, перпендикулярная П (рисунок 3). На луче в плоскости П сила $q\vec{E}$ перпендикулярна перемещению, и

$$A_2 = 0.$$



Зеркальное отражение относительно П *меняет знак всех зарядов: составляющая* $\vec{E}_{\parallel}$ *(серая) обязана быть нулевой, остаётся* $\vec{E} \perp$ П.

3. Работа на отрезке оси: A_1**.** При $d \ll R$ точки оси между обкладками далеко от краёв, и поле там — поле двух бесконечных плоскостей с плотностями $\pm\sigma$, $\sigma = Q/S$. Принцип суперпозиции: каждая плоскость даёт $\sigma/(2\varepsilon_0)$, между обкладками оба вклада направлены от $+Q$ к $-Q$, то есть по оси X:

$$E_X = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \pi R^2}.$$

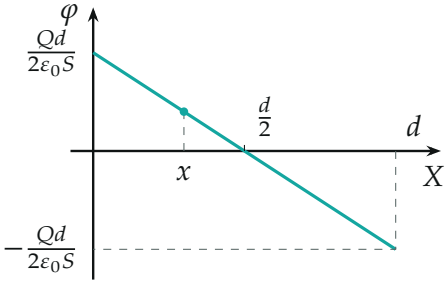
Поле однородно, сила qE_X постоянна, смещение по оси X равно $d/2 - x$:

$$A_1 = qE_X\left(\frac{d}{2} - x\right) = \frac{qQ}{\varepsilon_0 \pi R^2}\left(\frac{d}{2} - x\right).$$

4. Потенциальная энергия.

$$W = A_1 + A_2 = \frac{qQ}{\varepsilon_0 \pi R^2}\left(\frac{d}{2} - x\right).$$

Знак: при $q > 0$ и $x < d/2$ (ближе к $+Q$) энергия положительна — поле само выталкивает частицу к центру и дальше; в центре $W = 0$; ближе к $-Q$ — отрицательна. Иначе: потенциал на оси $\varphi(X) = E_X(d/2 - X)$ — линейный, симметричный, нулевой в центре, $\pm Qd/(2\varepsilon_0 S)$ на обкладках, и $W = q\varphi(x)$ (рисунок 4).



Потенциал на оси между обкладками: линейно убывает от $+Q$ к $-Q$ и равен нулю в центре; энергия частицы $W = q\varphi(x)$.

Обратите внимание. Нельзя считать поле вне конденсатора нулём и сказать, что потенциал обкладки $-Q$ равен нулю (тогда получилось бы $qE(d-x)$). Нуль потенциала — на бесконечности, и тогда по симметрии нулевой потенциал у средней плоскости, а не у обкладки.

Ответ:

$$W = \frac{qQ}{\varepsilon_0 \pi R^2}\left(\frac{d}{2} - x\right).$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Ф/м} \cdot \text{м}^2} \cdot \text{м} = \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Ф}} = \text{Дж}$. Симметрия: замена $x \to d - x$ (частица симметрично у другой обкладки) вместе с $Q \to -Q$ оставляет W прежней, как и должно быть. Сила $-\Delta W/\Delta x = qQ/(\varepsilon_0 S) = qE_X$ — совпадает с силой однородного поля.

Ответ. $W = \dfrac{qQ}{\varepsilon_0 \pi R^2}\left(\dfrac{d}{2} - x\right)$.